



TITLE:

# DLAの成長特性とフラクタル次元

AUTHOR(S):

太田, 正之輔

---

CITATION:

太田, 正之輔. DLAの成長特性とフラクタル次元. 物性研究 2009, 93(1): 33-69

ISSUE DATE:

2009-10-05

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/169149>

RIGHT:

# DLAの成長特性とフラクタル次元\*

九州大学総合理工学研究院 太田 正之輔

(2009年8月3日受理)

はじめに

DLA (Diffusion-Limited Aggregation) は拡散場のみの性質によって形成されたパターンの略称であり、スケール変換に対して普遍的な自己相似構造を示す。シミュレーション、実験、理論の様々な観点から研究されてきたが、その成長過程やフラクタル次元について未解明な点が多く、完全な理解には至っていない。拡散粒子のブラウン運動は物理学の様々な分野で基本的に重要な役割を担う現象である。非平衡開放系のブラウン粒子が形成する DLA の成長特性とフラクタル次元を解明することは、フラクタルの観点からラプラス場の自然現象を理解する上できわめて重要な課題である。第I章では、2次元DLAのシミュレーションから得られた成長安定性とゆらぎについて述べる。提案されたモデルからフラクタル解析と一致する2次元DLAのフラクタル次元  $D=1.7112$  が導かれる。この研究の動機づけとなった高次元DLAについては第II章で述べる。DLA初期過程のマイクロ構造と、マクロ構造への遷移現象がDLAの理解に困難を与えていることが明らかとなる。

## 第I章 2次元DLAの成長特性とフラクタル次元

2次元DLAは1981年にWittenとSander [1] によって計算機実験のモデルとして提案された。自己相似性を有することから活発に研究され [2-7]、シミュレーションと実験からフラクタル次元が約1.71であることが確認されている。しかしながら、フラクタル次元を理解する上で重要と思われる成長過程については十分に研究されていない。図1は1個の2次元クラスターの成長構造を示しているが、複雑に変化するクラスターの成長機構は未だ不明のままである。2次元DLAの未解決の問題点を要約すると、(i) フラクタル次元の解明、(ii) クラスター次元と界面次元 (active zone [8]) の相違 [9,10]、(iii) 漸近構造の解明に分類される。この章では、多くのシミュレーション結果を用いて2次元DLAの成長特性とフラクタル次元を解明するが、その結果クラスターの成長安定性、ゆらぎ、対称性、漸近特性が重要であることが示される。

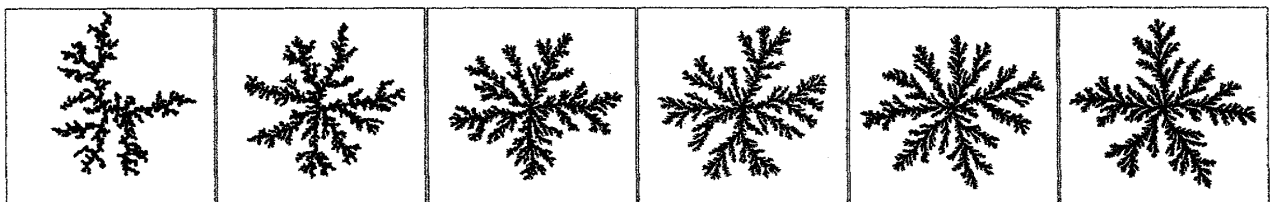


図1. 2次元DLAの成長過程における形態変化 (粒子数700個から40億個までの形状)

\* 本稿は、編集部の方から特にお願ひして執筆していただいた記事である。

## I-1. シミュレーション方法

Witten と Sander の DLA モデルは正方格子上で行われたが、Meakin [11] によってより一般性のある無格子上のシミュレーションに拡張された。本研究は、全て無格子のシミュレーションで得られた結果である。図2はシミュレーション方法の概略図である。ブラウン粒子の放出半径  $r_{Launch}$  と消滅半径  $r_{Kill}$  は  $r_{Launch} = r_{max} + 4$  と  $r_{Kill} = 100 r_{max}$  の通常用いられている条件を使用した。ここで、 $r_{max}$  はクラスターの最大半径である。本シミュレーションでは、図に示す極座標で分割された格子に、ブラウン粒子と最短距離  $d_{min}$  を与えたクラスターの粒子番号を記憶させている。次回はこの情報を用いて、図の円で示すように最短距離測定の検索領域を狭くすることができる。これによって計算の高速化を実現している。ブラウン粒子の飛距離は  $d_{min} \cdot 0.995$  とし、角度は乱数を使って決めている。また、ブラウン粒子の位置が  $r > 3r_{max}$  のときは最短距離測定を行わず、飛距離を  $r - r_{max} \cdot 0.995$  とした。 $d_{min}$  が1以下になったときクラスターに吸着したと判断する。軌跡に沿ってブラウン粒子を戻し、距離が1になる位置でクラスターに固定する。計算には倍精度変数を使用しているが、2粒子間の距離測定で倍精度を確保するために以下のように計算している。2粒子の座標を  $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1)$  と  $\mathbf{r}_2 = (x_2, y_2)$  とする。差  $\delta x = x_1 - x_2$ 、 $\delta y = y_1 - y_2$  から角度  $\theta = \text{atan2}(\delta y, \delta x)$  を求め、距離  $r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = \delta x \cos \theta + \delta y \sin \theta$  を計算する。中心に置いた直径1の種粒子から出発し、粒子数  $N = 2 \times 10^8$  のクラスターを600個、 $N = 4 \times 10^9$  のクラスターを1個製作した。2億粒子クラスターには約4日半、40億粒子クラスターには約2年半を要した。大きなクラスターを作成した目的は問題点 (iii) 漸近構造の解明のためである。その他、小さいクラスターは必要に応じて多数作成した。

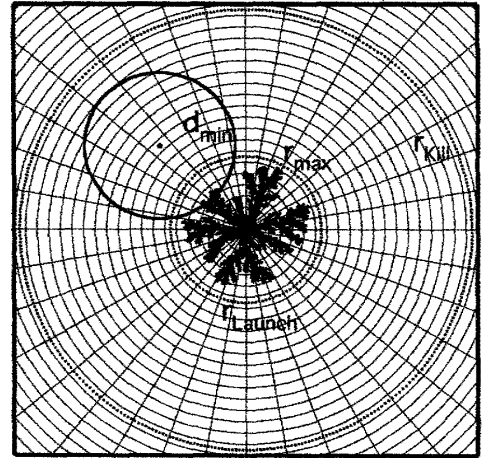


図2. シミュレーションの概略図

## I-2. 楕円近似

DLA の成長特性を調べるため、Garik [12] が問題点 (ii) の研究で使った図3に示す楕円近似の方法を用いた。クラスターの重心を原点とした  $x$ - $y$  座標で  $N$  粒子の位置を記述し、以下に示す慣性能率テンソルを求める。

$$\frac{1}{N} \begin{pmatrix} \sum x^2 & \sum xy \\ \sum xy & \sum y^2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

2つの固有値は長軸  $R_a$  と短軸  $R_b$ 、これに対応した固有ベクトルはそれぞれ主軸  $X_p$  と  $Y_p$  の方向を表す。通常用いられる回転半径  $R$  とは  $R^2 = R_a^2 + R_b^2$  の関係に

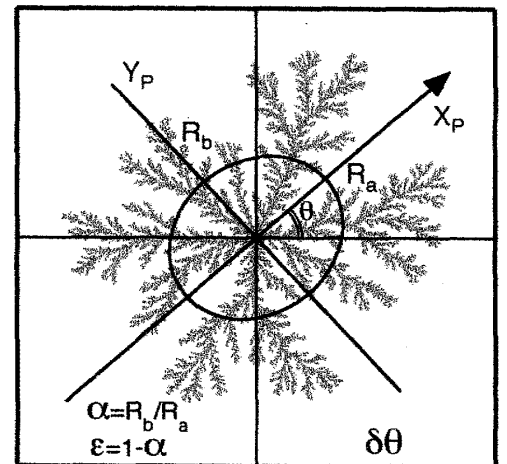


図3. 2次元 DLA の楕円近似

ある。長軸短軸比を  $\alpha = R_b/R_a$ 、等方的パターンからの変位を  $\varepsilon = 1 - \alpha$  とする。Garik は  $N$  の増加とともに  $\alpha$  は増加し、 $N = 50000$  で  $\alpha \sim 0.90$  の結果を得ている。ブラウン粒子が吸着する成長界面の幅は  $\varepsilon R_a = R_a - R_b$  で特徴づけられる。従って、DLA の成長とともに  $\alpha$  は 1 に近づき、界面の幅がもつ界面次元は、DLA の大きさを表す回転半径  $R$  のもつクラスター次元に漸近すると推論している。DLA の成長過程を調べるため、我々は新たに主軸  $X_p$  の示す角度  $\theta$  の角度変化  $\delta\theta$  を測定する。 $\delta\theta$  は  $N$  粒子から  $2N$  粒子まで成長する間の角度変化として定義している。

### I-3. 境界条件と界面成長

DLA 形成の境界条件は等方的である。実際、図2に示したようにブラウン粒子の放出や消滅には原点を中心とする円が使われている。従って、図4(a)のように境界条件に重点を置いて、無限大 DLA の外形は円形である ( $\alpha = 1$ ,  $\varepsilon = 0$ ) という推測が一般に信じられてきた。一方、図4(b)の界面成長の立場から考察すると、円形クラスターに粒子が吸着すると、飛出したこの粒子にブラウン粒子が着き易くなる。結晶成長では拡散場が先端に集中して発生するマリンス・ゼッカーカ不安定性 [13] に対応する非線形効果である。この立場から考えると、無限大 DLA の外形が楕円 ( $\alpha < 1$ ,  $\varepsilon > 0$ ) になっても不自然ではない。これが問題点 (iii) 漸近構造についての考察であり、クラスター成長の安定性についての研究の必要性を示している。以下では、我々が行ったシミュレーション結果と解析から、漸近構造を含め DLA の新しい成長特性が明らかとなる。

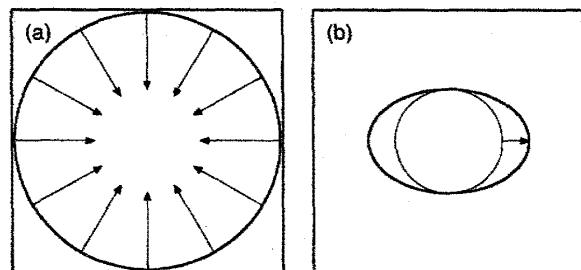


図4. 概念図 (a) 境界条件 (b) 界面成長

### I-4. 存在確率分布と角度変化

長軸短軸比  $\alpha$  をパラメータとして、クラスター構造や成長機構がどのように特徴づけられるのかの視点から、楕円近似の結果を用いて解析を行った。十分大きなクラスターとして2億粒子 DLA 600 個の  $2 \times 10^7 \leq N \leq 2 \times 10^8$  の領域を用いた。観測される  $\alpha$  の出現頻度から求めた存在確率分布  $\rho(\alpha)$  と角度変化の平均値  $\delta\theta(\alpha)$  を図5に示す。注目すべき第一は円形を表す  $\alpha \sim 1$  の点である。 $\rho$  は小さな値を示し、近傍では  $\rho \sim 150\varepsilon$  の直線的振舞を示している。また、 $\delta\theta$  は発散的に大きな値を示している。これは円形のクラスター成長が不安定である

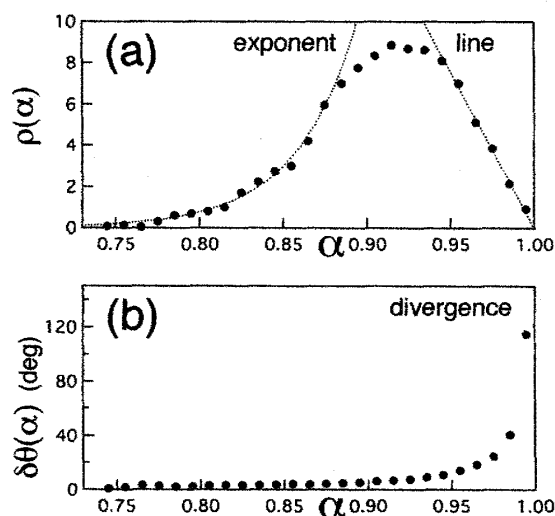


図5. (a) 存在確率分布  $\rho$  と (b) 角度変化  $\delta\theta$  の  $\alpha$  依存性

ことを示している。第二点は楕円を表す  $\alpha = 0.75 \sim 0.80$  の領域である。 $\rho$  は小さいにもかかわらず、 $\delta\theta$  は安定成長を表す小さな値を示している。近傍では  $\rho \sim 174 \exp(-\varepsilon/0.0369)$  の指数関数的振舞を示している。第三点は  $\rho$  が極大を示す  $\alpha = 0.90 \sim 0.92$  の領域である。図 5(a) の分布から計算される  $\alpha$  の期待値は  $\langle \alpha \rangle = 0.9096$  となり、平均的な DLA はこの領域に存在することがわかる。また、 $\delta\theta$  の期待値は  $\langle \delta\theta \rangle = 10.0^\circ$  を示している。後で説明されるが、この領域を 2 重安定性領域とよぶことにする。以上の解析から、円形クラスターの成長は不安定であること、DLA の成長形態が 3 つの領域に分類されること、更に平均的な DLA は  $\alpha \sim 0.91$  であることがわかった。

### I-5. DLA の成長安定性

DLA を構成する数本の主要な枝の先端成長は、独立した先端をもち成長速度の大きい樹枝状成長と多数の小枝に分岐した成長速度の小さい分岐成長とに分類される。2 種類の異なる先端成長に注目しながら、前節の解析で示された 3 つの領域の成長安定性を以下で考察する。

#### I-5-a. 安定成長 ( $\alpha = 0.75 \sim 0.80$ )

図 6 に安定成長を示す典型的な例を示す。(a) 図は主軸が水平になるように描かれており、粒子数は (b) (c) 図に円で示す  $N = 85750000$  である。長径  $R_a$  と短径  $R_b$  の楕円が重ね書きされており、比は  $\alpha = 0.748$  の小さな値を示している。主軸  $X_p$  の正の方向に tip A の樹枝状先端が、負の方向に tip B の先端が活発に成長している様子が見て取れる。すなわち、主要な 2 本の枝が主軸と重なりながら正負の方向に成長する、オーバーラップ形態が安定成長の特徴である。(c) 図が示すように主軸の方向を表す  $\theta$  にはほとんど変化がなく、2 本の枝が安定して成長することを示している。これは、吸着確率の大きい主軸上によく伸びた tip A と tip B にブラウン粒子が吸着して成長するため、(1) 式の対角成分  $\Sigma x^2$  が大きく増加するのに比べて、非対角成分  $\Sigma xy$  の増加は小さい。従って、固有ベクトルの方向は変化せず、 $\theta$  は安定していると理解される。しかしながら、前節図 5(a) の存在確率  $\rho$  が示しているように、小さい  $\alpha$  をもつ安定成長領域の  $\rho$  は小さい。この点については後で考察するが、十分伸び

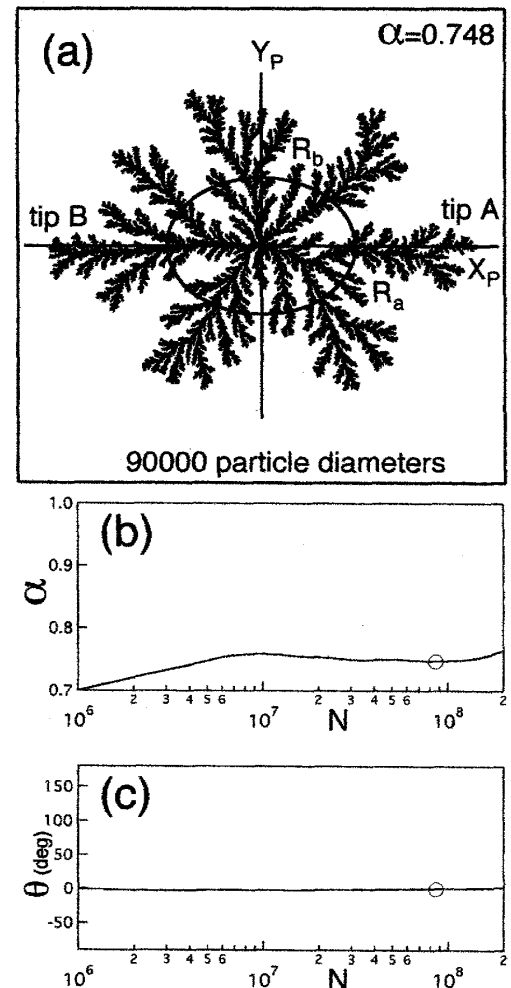


図 6. 安定成長 (a) クラスター、(b) 比  $\alpha$  と (c) 角度  $\theta$  の変化

て外場に飛出した樹枝状先端は側面にブラウン粒子が吸着して不安定化し、先端分岐現象を生じることによる。実際、(a) 図の tip B は先端分岐現象の初期段階にあり、この分岐成長に伴って  $\alpha$  が増加していく様子が (b) 図の 2 億粒子近辺に現れている。

### I-5-b. 不安定成長 ( $\alpha \sim 1$ )

図 7 は不安定成長の典型的な例である。図 6(a) と違ってクラスターの枝と主軸の関係がノンオーバーラップ形態を示している。(a) 図の粒子数は  $N = 80180000$  で、(b)(c) 図には円で示すサイズである。長径  $R_a$  と短径  $R_b$  の楕円は  $\alpha = 0.999$  のため円と区別がつかない。1 億粒子以下でも  $\alpha \sim 1$  となるクラスターの存在が確認された。(b) 図が示すように  $\alpha \sim 1$  は瞬間的に発生する現象である。前後では  $\alpha \sim 0.92$  の DLA の平均的な値を示している。(c) 図では主軸の角度  $\theta$  が  $\theta_1$  から  $\theta_2$  に遷移する領域で生じており、(a) 図に示す主軸が  $X_{p1}$  から  $X_{p2}$  へ遷移することに対応している。前後のクラスターを観察すると、 $X_{p1}$  軸の負の方向に成長していた樹枝状先端が tip C の先端分岐現象を起こして成長速度が小さくなっている。一方、樹枝状先端の tip D と tip E が急速に成長するため、主軸が  $X_{p1}$  から  $X_{p2}$  へ変化している。(a) 図は主軸  $X_p$  上に主要枝が存在しないため、ブラウン粒子の吸着が (1) 式の非対角成分  $\Sigma_{xy}$  を大きく増加させ、固有ベクトルの方向  $\theta$  を不安定にし、図 5(b) の  $\delta\theta$  を発散的に大きくしていることが理解される。(a) 図の tip D と tip E は樹枝状形態を保ち、 $\alpha \sim 1$  では先端分岐現象を起こす兆候は見られない。先端分岐現象が発生するには、樹枝状先端が十分成長して外場に飛び出る必要がある。結果として、クラスターは (b) 図が示すように  $\alpha \sim 0.92$  まで減少していると考えられる。以上の考察は、DLA が数本の主要な枝から構成されていることが本質的であり、枝先端の成長機構に依存して形態変化することが重要であることを示している。その結果、 $\alpha = 1$  の等方的クラスターは不安定な遷移過程でしか実現されないことが結論される。従って、問題点 (iii) 漸近構造に関して、無限大 DLA の外形は円形であるの推論には、DLA 構造と成長安定性の観点から否定的結論が得られた。

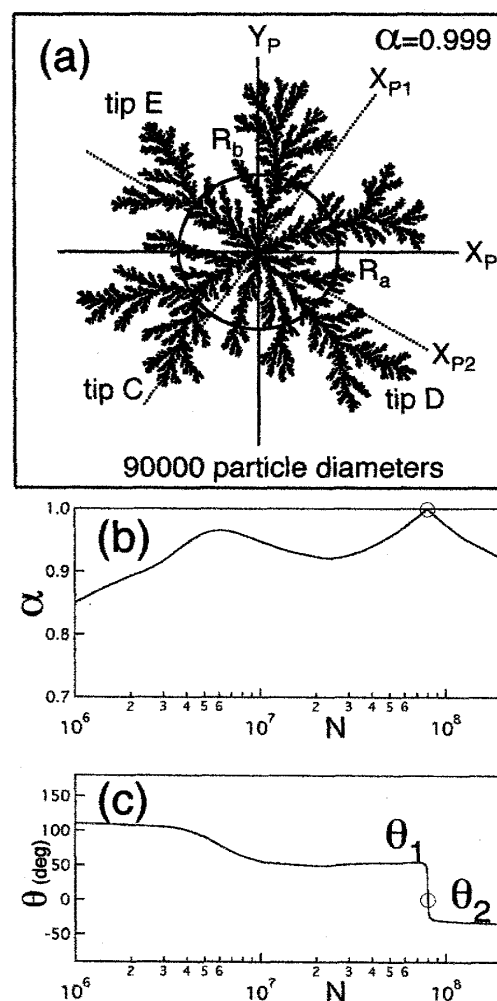


図 7. 不安定成長 (a) クラスター、(b) 比  $\alpha$  と (c) 角度  $\theta$  の変化

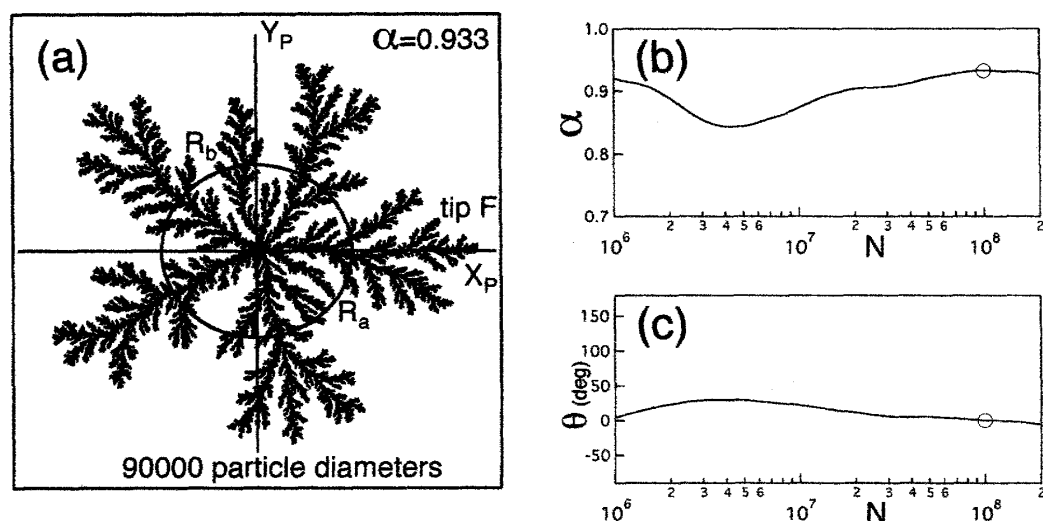


図8. 2重安定性成長 (a) クラスター、(b) 比  $\alpha$  と (c) 角度  $\theta$  の変化

#### I-5-c. 2重安定性成長 ( $\alpha=0.90\sim0.92$ )

DLAの平均的な形態を表すこの領域は、図5(a)に示された存在確率  $\rho$  に関して極大を示し、指数関数で増加する安定成長領域と直線的に増加する不安定成長領域の中間に位置している。このことから、安定成長と不安定成長の両方の性質を持った2重安定性の形態がこの領域を特徴づける有力候補と考えられる。2億粒子600個のDLAの観察から発見された2重安定性を示すクラスターの1つを図8に示す。(a) 図の  $N=99550000$  のクラスターは5本の主要な枝を有し、1本の枝が主軸に沿って成長している。(b)(c) 図には  $\alpha$  と  $\theta$  が不規則にゆらぐ様子が見られる。クラスターは主軸の負の方向に枝がなく、不安定を表すノンオーバーラップ形態を示している。一方、樹枝状先端の  $\text{tip F}$  は主軸の正の方向に成長するオーバーラップ形態を示しているが、主軸の上下に波打ちながら成長している様子が見て取れる。負の主軸方向が不安定なノンオーバーラップ形態のため、角度方向のゆらぎが容易に発生し、 $\text{tip F}$  の成長に影響を与えていると考察される。また、このクラスターの5本の主要枝は  $X_P$  軸を軸として上下に対称的に整った位置に配置されている。2重安定性に現れる先端成長の角度方向のゆらぎが、主要枝の対称的配置の構築に寄与していると推測される。

#### I-5-d. 発展形態の安定性

DLAの安定成長、不安定成長、2重安定性成長について、主軸に沿って成長する枝の先端に注目して調べてきた。クラスター成長に最も大きく寄与しているのは外場方向に安定成長する樹枝状先端であった。図6-8で見た典型的な3種類のクラスターのその後の発展形態を調べてみる。図9に2億粒子まで成長したクラスターが描かれている。安定成長であった(a) 図の樹枝状先端の  $\text{tip A}$  と  $\text{tip B}$  は、サークルで示すように共に分岐形態に変化している。(b) 図の不安定成長では、 $X_{P2}$  軸方向に樹枝状形態で安定成長していた  $\text{tip D}$  と  $\text{tip E}$  のうち、 $\text{tip D}$  は樹枝状形態を保っているが  $\text{tip E}$  は分岐形態に変化している。(c) 図の2重安定性成長で主軸上

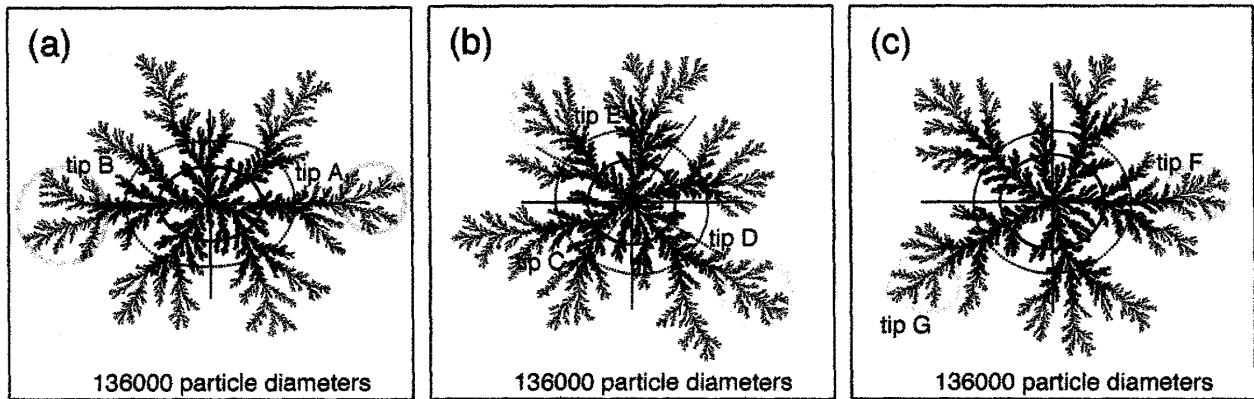


図9. 2億粒子の成長形態 (a) 安定成長 (b) 不安定成長 (c) 2重安定性成長

を安定成長していた tip F は分岐形態に変化し、新たに図左下の tip G が樹枝状先端の形態で勢いよく成長している。このように安定成長していた樹枝状先端も、十分成長して外界に飛び出ると不安定化して先端分岐現象を起こしている。この現象を樹枝状・分岐転移とよぶことにすると、I-4 節で述べた求めた存在確率分布  $p(\alpha)$  が  $\alpha < 0.75$  で無視できるほど小さいのはこの転移現象が発生するためと考えられる。樹枝状先端の安定成長は、I-3 節で述べた飛出した先端にはブラウン粒子が着き易いという非線形効果が優位であるときに限られる。飛出し過ぎると境界のもつ等方性が優位になり、側面成長によって樹枝状・分岐転移現象が発生すると考察される。この現象が原因となって動径方向にゆらぎをつくり、回転半径  $R$  などのクラスターサイズを表現する量に影響を与えている。すなわち、(c) 図のように主軸上の tip F が樹枝状先端で安定成長しているときは  $R$  が大きく増加する。しかし、先端分岐形態に転移すると成長速度が小さいため  $R$  の増加速度が減少する。この結果、 $D_g = dN/dR$  で定義される回転半径の局所フラクタル次元には、樹枝状成長では減少、分岐成長では増大のゆらぎが現れる。図 10 に 40 億粒子の DLA から得られた  $D_g$  が樹枝状と分岐成長に応じて大きく変動する様子が示されている。クラスター成長を主導していた樹枝状先端が分岐成長に転移すると、次に主導する樹枝状先端は他の主要枝から確率的に選択されているように思われる。図 9(a) では左

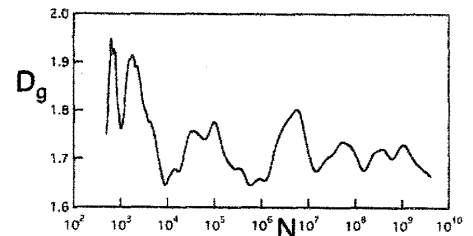


図 10. 40 億粒子クラスターの局所フラクタル次元

長軸短軸比 $\alpha$	0.75~0.80(楕円)	0.90~0.92(楕円)	~1.0(円)
存在確率 $p$	小(指数関数的)	極大	小(直線的)
角度変化 $\delta\theta$	~0°	~6.5°	発散
成長安定性	安定	2重安定性	不安定
主軸上形態	樹枝状・樹枝状	樹枝状・ボイド	ボイド・ボイド
発展形態	分岐・分岐	分岐・樹枝状先端へ遷移	樹枝状先端へ遷移

表 1. 楕円近似を用いた DLA の成長安定性



上の枝、図9(b)では右下あるいは左側の枝、図9(c)では tip G が次の樹枝状成長を担うように見えるが、選択の一般的ルールは見つかっていない。樹枝状・分岐転移現象を理解するには、厳密には存在確率分布の指数関数的振舞も含めて理論的に扱う必要があるが、現時点では未解明のままである。表1には、楕円近似を用いて行った成長安定性の特性がまとめられている。クラスター成長について、安定と不安定の2重安定性構造を有し、これによって角度ゆらぎが発生すること、また先端成長の樹枝状・分岐転移現象によって動径方向のゆらぎが形成されること、これによって主導的な樹枝状先端が他の主要枝に遷移するなど、DLAの平均的な成長特性が明らかとなった。後節では、この成長特性を反映したDLAの成長モデルが提案される。

### I-6. DLAの対称性

DLAが約5本の主要な枝をもって成長することは良く知られていたが、疑問点として解明されないまま残されていた。図11に示されるように、円形の境界から成長させたDLAにも5回対称性が出現している。図12に示す半径の異なる初期条件の漸近特性から、DLAが5.44回の対称性を有することが報告されている[14]。また、同軸キャパシターのラプラス場とDLAシミュレーションのブラウン運動との関連性に着目した研究が行われ、フラクタル性をもつクラスターの成長条件が調べられている[15]。この研究を更に発展させて、吸着壁をもつ2つの平行な境界壁におけるブラウン粒子の運動をシミュレーションによって調べ、図13に示すように、対面の吸着壁に到着するブラウン粒子の確

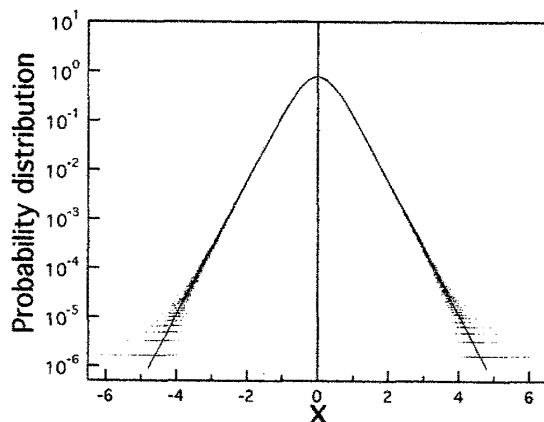


図13. ブラウン粒子の吸着確率分布

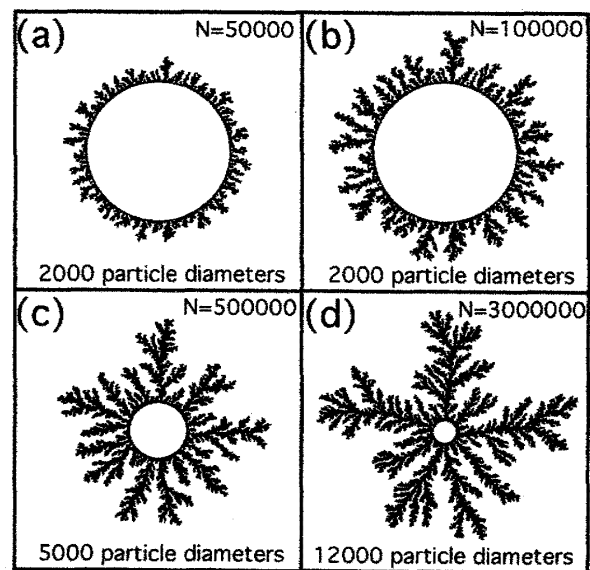


図11. 円形の境界から成長するDLA

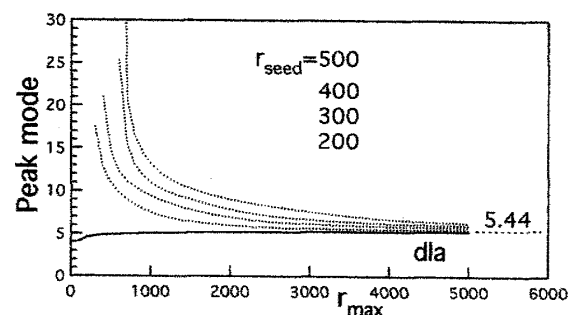


図12. DLAの選択モードの漸近特性

率分布を得ている。分布の裾野が指数関数に従うこととピークの値を用いた解析から、以下の吸着分布関数を求めている。

$$f(x) = \frac{\pi}{4} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) \quad (2)$$

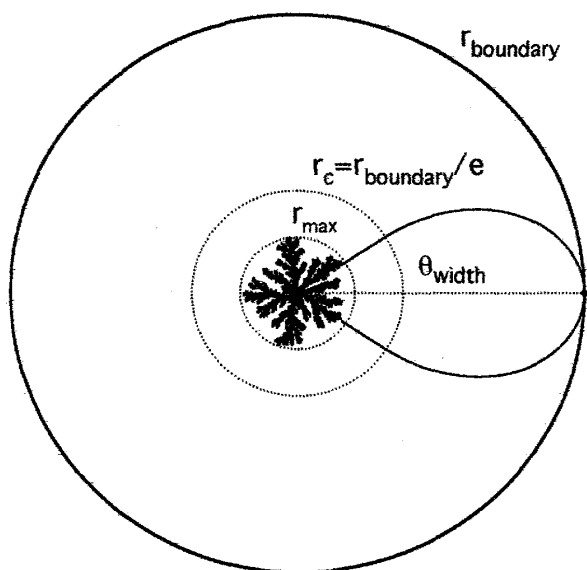


図 14. DLA の対称性仮説の概念図

この結果を図 14 に示す円形ラプラス場に対応させ、分布の幅  $\theta_{width}$  から 5.44 と一致する  $\sqrt{3}\pi$  回の対称性を得ている [16]。ここで、同軸キャパシターの規格化された表面電荷密度が極小を示す外径  $r_{boundary}$  の  $1/e$  の半径  $r_c$  の重要性に着目している。電気力線の表面密度の効果と  $r_{boundary}$  との距離の効果が交差するこの半径でクラスターの成長機構 [15] が変化することから、DLA の対称性が半径  $r_c$  で決定されるという仮説が用いられている。

この仮説は、DLA シミュレーションにおいて  $r_{kill} \geq 3 r_{max}$  の条件が必要であることが経験的に知られているが、係数 3 の意味が厳密に

は  $e=2.718$  であることを説明している。また、対称性を制御したモデルを提案してシミュレーションを行い、仮説の正当性を確認している。後節ではこの仮説を用いて、DLA の対称性が  $\sqrt{3}\pi$  であること、すなわち主要な枝の平均間隔が  $2/\sqrt{3} \sim 66.16^\circ$  を使った DLA の成長モデルが提案される。

### I-7. DLA のくさびモデル

静電場中に置かれた先端角度  $\phi$  のくさび形導体を考えよう。電場は導体表面に垂直となり、電場の強さはガウスの法則によって表面電荷密度に比例する。導体を DLA クラスターと見なすと、表面電場の強さあるいは表面電荷密度がクラスターの成長確率と直結する。くさび先端を原点とする座標系を図 15 のように定義すると、クラスター周辺のラプラス場の解は

$$u(\xi, \zeta) = C \xi^{\pi/\gamma} \cos(\pi\zeta/\gamma) \quad (3)$$

で与えられる。ここで、 $u$  は静電ポテンシャル、 $\gamma = 2\pi - \phi$ 、 $C$  は定数である。表面に沿って先端から  $\eta$  の位置の成長確率は次式から求められる。

$$\nabla u(\eta, \zeta) = \frac{C\pi}{\gamma} \eta^{\pi/\gamma-1} \quad (4)$$

クラスターの粒子数を  $N$ 、サイズを  $R$  として、領域  $0 \leq \eta \leq R$  の積分から  $dN/dt \sim CR^{\pi/\gamma}$ 、領域  $0 \leq \eta \leq 1$  の積分から  $dR/dt \sim C$  が得られ、次式が導かれる [17]。

$$\frac{dN}{dR} = \frac{dN/dt}{dR/dt} \sim R^{\pi/\gamma} \quad (5)$$

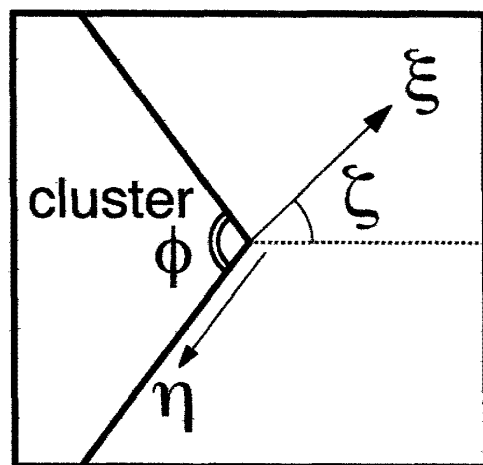


図 15. DLA のくさびモデル

上式を積分して得られた  $N$  と  $R$  の関係式から、成長確率スケーリングの観点に立ったフラクタル次元が次のように求められている [17,18]。

$$D_\phi = 1 + \frac{\pi}{2\pi - \phi} = \frac{3\pi - \phi}{2\pi - \phi} \quad (6)$$

図 16 には、DLA にくさびモデルを対応させる目的で行われた解析方法が描かれている [5]。点線で示すように、クラスターの外側に接する全ての接線の合成から包絡線を定義することができる。P 点はクラスターの最大半径  $r_{\max}$  を示し、この点を中心に対称性を考慮して  $\pm 33.08^\circ$  を主要枝の成長領域とする。p1 と p2 はこの領域を表す包絡線上の点である。p1 と p2 を通る接線が交差する点 T をくさび先端と定義し、内角  $\phi_{tip}$  をくさび角として測定する。粒子数 3 百万の多数のクラスターから得られたくさび角  $\phi_{tip}$  の分布関数が図 17 に示されている。実線のガウス分布と誤差内で一致した分布を示し、 $\phi_{tip} = 106.2 \pm 13.1^\circ$  が得られている。(6) 式に代入

して、先端次元とよぶ成長確率スケーリングに従ったフラクタル次元  $D_{tip} = 1.709$  が得られている。小さいサイズの DLA の結果ではあるが、約 1.71 のよく知られた次元が得られている。外形が円 ( $\alpha = 1$ ) になる対称性 5.44 回の多角形のくさび角は  $113.8^\circ$  と計算され、この解析で得られた  $\phi_{tip}$  はこれよりかなり小さな値となっている。従って、DLA の平均外形は I-4 節の楕円近似で述べたように  $\alpha < 1$  の楕円であること、フラクタル次元については成長確率スケーリングの考え方が支持されていることが明らかとなった。

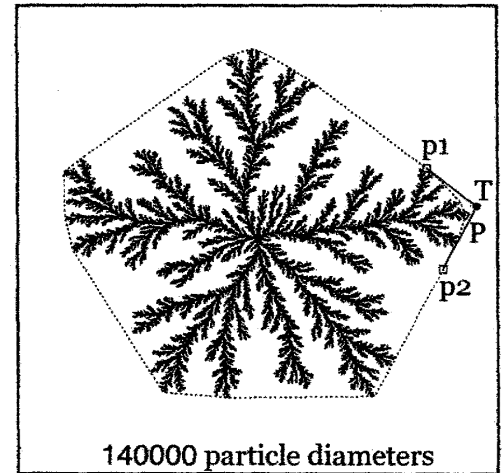


図 16. DLA のくさび角の定義

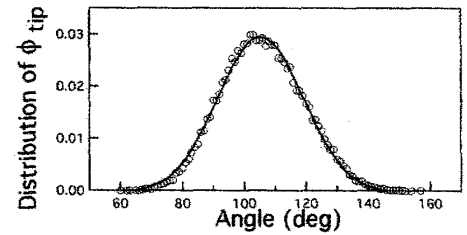


図 17. くさび角  $\phi_{tip}$  の分布関数

## I-8. 変形ファクター $\varepsilon$ の漸近特性

楕円解析で定義した  $\varepsilon = (R_a - R_b)/R_a$  を変形ファクターとよぶことにする。円形クラスターの不安定性から  $\varepsilon > 0$  であること、I-4 節に示した存在確率分布の期待値  $\langle \alpha \rangle = 0.9096$  から  $\varepsilon = 0.0904$  であることが既に調べられている。この節では、長さスケール  $\lambda$  の関数として表した  $\varepsilon(\lambda)$  について詳細に調べる。問題点 (i) に関して、クラスターのサイズを表す回転半径  $R$  は  $R^2 = R_a^2 + R_b^2$  で表され、 $R_a$  と  $R_b$  を通じて  $\varepsilon$  に依存する。問題点 (ii) に関して、 $\varepsilon R_a$

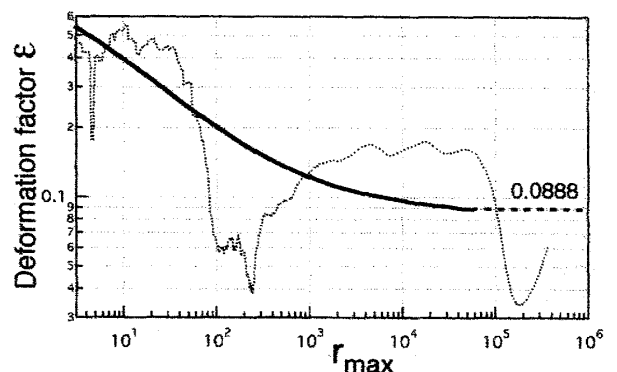


図 18. 2次元 DLA の変形ファクター

が成長界面の幅を特徴づけている。問題点 (iii) に関して、DLA の漸近特性は  $\varepsilon$  が担っている。このように、DLA を理解するには変形ファクター  $\varepsilon(\lambda)$  の解明が不可欠である。

図 18 に示す実線は多数のクラスターの平均値から得た  $\varepsilon$  である。スケールを  $r_{\max}$  として最大 61595 まで測定している。 $r_{\max} > 22280$  以上の最大スケール領域は 600 個の 2 億粒子クラスターの結果である。 $r_{\max}$  が 61595 以下の場合にはシミュレーションを続け、条件を満たすまで成長させている。 $r_{\max} = 61595$  での平均粒子数は 1.919 億個である。平均値  $\varepsilon$  は  $r_{\max} \geq 50000$  (平均粒子数 1.346 億個) でほぼ一定の値を示している。この区間の平均値から得た漸近値  $\varepsilon(\infty) = 0.08880 \pm 0.00004$  が図に水平破線で示されている。このように、大きな DLA クラスターの測定によってはじめて、 $\varepsilon$  に一定の漸近値の存在することが明らかとなった。図 18 には、1 個の 40 億粒子 DLA が示す  $\varepsilon$  が破線で示されている。実線の平均値  $\varepsilon$  を中心にして、上下にゆらぎながら成長する様子が描かれている。20 億粒子近辺に  $\varepsilon \sim 0.034$  の極小があるが、それ以降は上昇し漸近値 0.0888 に近づいている。樹枝状・分岐転移現象の発生が  $\varepsilon$  を決めるのに重要であることを 1-5 節で述べたが、マクロスケールの樹枝状・分岐転移現象が実現されて、スケールに依存しない一定値の  $\varepsilon$  になっていると理解される。問題点 (iii) 漸近構造の解明については、変形ファクターの漸近値  $\varepsilon(\infty) = 0.08880 \pm 0.00004$  が得られた。

平均値  $\varepsilon$  が示す漸近特性のスケール依存性について考察する。 $20 \leq r_{\max} \leq 100$  の領域で最も急峻な直線であることが図 18 の実線からわかる。この領域が、DLA 成長の初期段階から  $\varepsilon(\infty)$  に減少していく漸近的振舞に移行する、遷移領域と推定される。スケール  $\lambda \sim 2r_{\max}$  とすると、この直線は  $\varepsilon(\lambda) \sim 1/\lambda^{0.29}$  で表され、 $\lambda$  の増加に対して非常にゆっくり減少することを示している。

平均値が  $120 \leq N \leq 3000$  であることから、遷移領域の中心値として  $\lambda_c \sim 100$ 、 $N_c \sim 1000$ 、 $\varepsilon_c \sim 0.24$  と見積もれる。図 19 に遷移領域を含む回転半径のデータを示す。長軸半径  $R_a$  に注目すると、 $N$  が小さいときは  $R$  に近い値であるが、 $N$  が大きくなるにしたがい短軸半径  $R_b$  に近づいている。点線の四角が示す  $N_c \sim 1000$  の近辺が両性質の遷移領域であることがわ

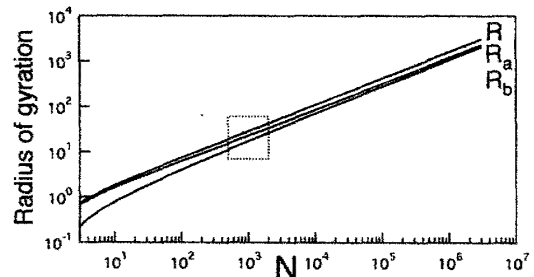


図 19. 遷移領域の回転半径

かる。 $\varepsilon = (R_a - R_b)/R_a$  であることから、 $\varepsilon$  の遷移特性がこの性質を反映したものであると理解できる。ここで、 $N=1000$  で  $R=28.5$ 、 $R_a=22.7$ 、 $R_b=17.2$  である。従って、回転半径に関

して  $R_c \sim 30$  と見積もれる。遷移領域を特徴づけるスケールと、1 億粒子近くのクラスターの tip A (図 6) と tip F (図 8) との比較が図 20(a) (b) に示してある。先端右側に  $\lambda=100$  間隔の正方形格子が描かれている。枝の平均的な太

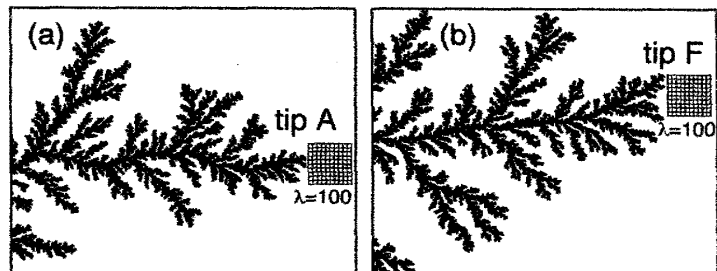


図 20. 枝先端部と特徴的スケール  $\lambda_c$  との比較

さが 100 近辺であることがわかる。以上の考察から、安定した漸近値  $\varepsilon(\infty)$  が達成されるには、クラスター成長を主導する枝先端部の太さが、遷移領域から決定される特徴的長さ  $\lambda_c \sim 100$  より太くなる必要があると考えられる。樹枝状成長する主要枝の先端分岐現象が変形ファクター  $\varepsilon$  を決定することを考えれば、先端部がマクロ構造になる必要性は納得できる条件である。ただし、今の太さに関する議論で注意すべき点がある。先端部を更に拡大すると、細い枝が複雑に入り組んだ構造が観察されるが、一方で先端であるという全体像が見えなくなる。従って、クラスター外形が判別できる図 20 に示すようなスケールで測定した太さであることを付け加えておく。先端成長の非線形効果はラプラス場に固有の性質であり、マクロスケールになっても消えない効果である。太い先端を有する 1 億粒子を超えるサイズに成長して初めて、先端分岐現象を誘起する条件が安定化し、一定の変形ファクターが実現されると考察される。

問題点 (ii) の成長界面領域 (active zone) は成長を止めたクラスターに多数のブラウン粒子を吸着させ、吸着位置の統計平均を使って議論されている [8-10]。漸近特性と関連するこの問題について、我々の結果と比較し検討する。平均半径  $R_{Act}$  には  $R_{Act} \sim N^\nu$ 、平均幅  $W_{Act}$  には  $W_{Act} \sim N^{\bar{\nu}}$  のスケーリング関係を表す指数  $\nu$  と  $\bar{\nu}$  とが用いられている。両指数が異なる値を示し、その相違について研究されている。平均半径の指数は回転半径から得たフラクタル次元の逆数と一致し、ほぼ一定の値  $\nu=0.584$  である。平均幅から得られた指数  $\bar{\nu}$  は  $\sim 0.48$  から成長とともに増加し、 $N=10^6$  の粒子数で  $\sim 0.56$  となることが報告されている [10]。両者の指数が異なることは物理的に不自然であるが、DLA の過渡現象と考え、無限大クラスターでは一致すると推測されている。我々が行った結果を図 21 に示す。300 万粒子 27000 個クラスターの平均値  $R_{Act}$  と  $W_{Act}$  から得た指数が  $\nu$  と  $\bar{\nu}$  である。報告された結果と一致しているが、 $N < 1000$  の領域で異常な振舞が見られる。 $120 \leq N \leq 1800$  で逆数が 2 以上になる  $\bar{\nu} < 0.5$  を示し、極小値は  $\bar{\nu} \sim 0.491$  である。これは変形ファクターで議論した  $N_c \sim 1000$  の遷移領域と関係していると推測される。 $\bar{\nu}_{Wab}$  は楕円近似の結果を用いて  $W_{ab} = R_a - R_b$  から得た界面指数である。2 億粒子クラスターは 600 個の少数のためノイズが大きい、指数は 0.584 に漸近していることがわかる。問題点 (ii) クラスター次元と界面次元の相違に関して、変形ファクター  $\varepsilon$  が変化するため指数  $\bar{\nu}$  が変化すること、 $\varepsilon$  が一定になる漸近領域で  $\bar{\nu}_{Wab}$  は指数  $\nu$  と一致することが確認された。

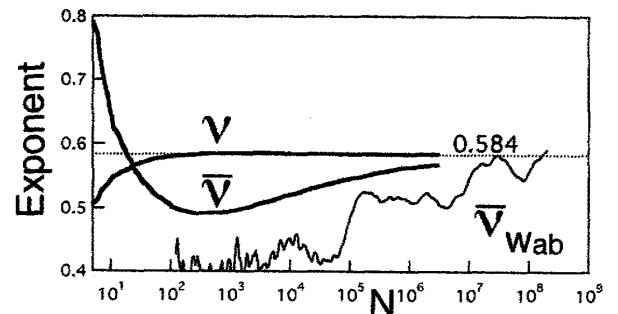


図 21. 成長界面領域が示す指数

界面指数が  $\bar{\nu} < 0.5$  を示す異常な振舞に関連して、以下では更に掘り下げて考察する。まず、界面の大きさを表す平均半径  $R_{Act}$  とクラスターの大きさを表す回転半径  $R$  の比を図 22(a) に示して考察する。 $R_{Act}/R$  は成長の初期段階で大きな値を示し、ほとんどのブラウン粒子が

クラスターの外殻に吸着することを示している。例えば  $N=10$  では、 $R_{Act}=2.92$ 、 $R=1.81$ 、 $R_{Act}/R=1.61$ 、 $\varepsilon=0.521$  である。これはシミュレーションの方法を考えると次のように説明できる。クラスター近傍まで来たブラウン粒子の飛距離は、粒子の直径を  $a=1$  として、 $d_{min}-(a-0.005)$  としている。 $0.005$  はクラスター粒子との重なりを許す表面厚みであり、計算に支障のない限り薄くしている。飛距離の第2項はクラスター側から見ると、クラスター粒子の周りに  $a-0.005$  の厚みを持ったブラウン粒子の侵入禁止帯が存在することになる。簡単に云うと粒子同士の重なりが許されないことに起因している。初期段階のクラスターでは、この効果でブラウン粒子が内部に侵入できず、非線形効果と相まって  $\varepsilon$  の大きいクラスターが形成される。従って、初期DLAのフラクタル次元は明らかに1.71より小さい。また大きいサイズのクラスターであっても短いスケールではこの侵入禁止効果によって、次元が小さいことに注意しなければならない。次の段階は(a)図に極小値  $R_{Act}/R=1.447$  で示す少しサイズの大きい領域 ( $N\sim 350$ 、 $R_{Act}\sim 22.2$ 、 $R\sim 15$ 、 $\varepsilon\sim 0.29$ ) で、上記の侵入禁止効果が薄れてブラウン粒子が内部まで侵入することを表している。細長いクラスターの側面は表面積が大きいので吸着する確率が高いこと、更にクラスター重心との距離が短い位置であるため、あたかも粒子がクラスターの奥深くまで侵入したかのように測定される。

この強調された侵入効果が(a)図の極小を生じている。図21に示した界面幅の指数  $\bar{\nu}$  が0.5以下の値になるのも、このみかけの侵入効果のためである。これを詳しく調べるため、図22(b)に吸着粒子の分布関数を示す。分布関数の平均値が半径  $R_{Act}$  であり、 $r_g$  は重心から測定した吸着位置である。また、分布の幅が  $W_{Act}$  であり、これから図21の指数  $\bar{\nu}$  を求めている。通常はこれをガウス分布で近似して議論しているが、ここではブラウン粒子の侵入特性を知るため両対数表示している。また、ピークが1になるように規格化して描いている。図中の  $r_{gp}$  はピークの位置である。重心を中心に測定しているため  $r_g < 1$  に吸着する粒子があることに注意しなければならない。 $N=5$  の分布の左側は鋭く下降して、侵入禁止帯による遮蔽効果がはっきりと現れている。これとは逆に  $N=31$  の2番目の分布の左側テールは奥深く内部まで伸びている。細長いクラスターに生じる異常侵入

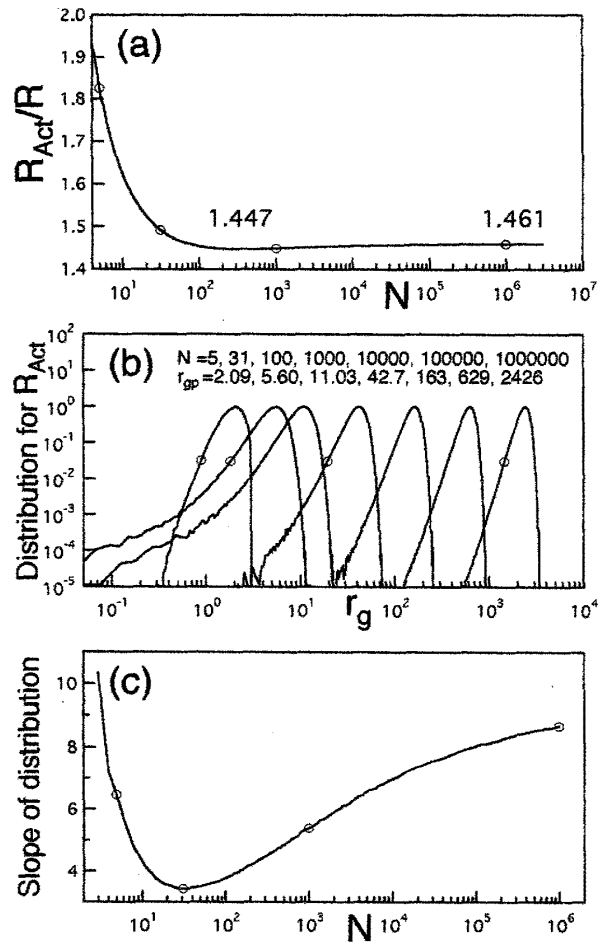


図22. 界面領域の特性 (a) 半径比  
(b) 分布関数 (c) 勾配曲線

効果を鮮明に表している。このテールは次第に短くなり、 $N=10^3$  から  $10^6$  となるに従って、主要枝によって生じる通常の遮蔽特性に変化している。この遮蔽特性を明確にするため、ピーク値の  $0.01 \sim 0.1$  倍となる領域の直線近似から求めた勾配が図 22(c) に示されている。 $N=5, 31, 10^3, 10^6$  に付けた丸印は解析の中心位置を示している。この曲線は吸着粒子に作用する遮蔽効果を定量的に表している。 $N=10^6$  の場合に比べて、 $N=31$  の値は半分以下の極小値を示し、吸着粒子の異常侵入を特徴付けている。 $N \sim 10^3$  は曲線の変曲点を表しており、侵入・遮蔽特性が遷移する点であることを (c) 図は明瞭に示している。また、(b) 図の分布のピークの位置から平均直径が  $\sim 85$  となり、 $\lambda_c \sim 100$  と矛盾せず良く一致している。このように DLA の成長過程を理解する上で、重心を中心とする量が初期過程で不可解な特性を持つことに注意する必要があることを指摘しておく。図 18 で述べた変形ファクターの遷移領域はちょうど侵入・遮蔽特性の遷移点に対応している。この考察の結果、 $\varepsilon(\lambda)$  の漸近特性は、遮蔽効果が支配する領域に遷移した  $N_c \sim 1000$ 、 $\lambda_c \sim 100$ 、 $\varepsilon_c \sim 0.24$  のクラスターが、先端部が  $\lambda_c$  より太くなって分岐現象が安定化する  $\varepsilon(\infty) = 0.0888$  に向かって漸近して行く過程と解釈される。

次に回転半径についてこの効果を考察する。回転半径  $R$  は DLA のサイズ測定に最もよく用いられ、 $N \sim R^{D_g}$  の関係を使ってフラクタル次元  $D_g = 1.712 \sim 1.715$  が得られている [5, 20]。回転半径次元  $D_g$  は誤差が少なく、小さいクラスターでも精度良く測定できる方法と考えられている。局所フラクタル次元を  $D_g$  とし、図 19 で用いた 74000 個のデータから得た値を図 23 に示す。300 粒子以上で破線が示す 1.712 に近い値であることがわかる。詳しく観察すると約 1200 粒子で  $\sim 1.715$  の極大を示している。この領域は正に今まで調べてきた遷移領域  $N_c \sim 1000$  やみかけの異常侵入効果が存在する領域である。比較のために  $N \sim R_a^{D_{ga}}$  と  $N \sim R_b^{D_{gb}}$  を仮定して、 $R_a$  と  $R_b$  から計算した次元  $D_{ga}$  と  $D_{gb}$  が図に示してある。明らかに  $D_{ga}$  には異常侵入効果による影響があり、粒子の側面吸着によって  $\sim 1.78$  の極大を持つ振舞を示している。 $R^2 = R_a^2 + R_b^2$  の自乗和の関係を通して、大きな値を持つ  $R_a$  の影響が強く  $R$  に反映された結果、小さいクラスターにもかかわらず漸近値に近い 1.712 や  $\sim 1.715$  の極大を示していることは明らかである。成長とともに増加するスケール  $R$  を用いて  $dN/dR$  で定義される次元を一般に成長次元という。回転半径次元  $D_g$  はこの例で、変形ファクターの変化がその値に敏感に影響を与えている。また、逆数で定義されている界面指数  $\nu$ 、 $\bar{\nu}$ 、 $\bar{\nu}_{wab}$  にも同様の性質がある。これらの成長次元は  $\varepsilon$  依存性がそれぞれ異なるため、 $\varepsilon$  が一定になる領域を除いて、数値的に一致を得ることは期待できない。従って、問題点 (i) の回転半径次元と (ii) の界面指数とが整合しないのは、両者が変形ファクター  $\varepsilon$  に対して異なる依存性を持った次元あるいは指数であるためと結論される。

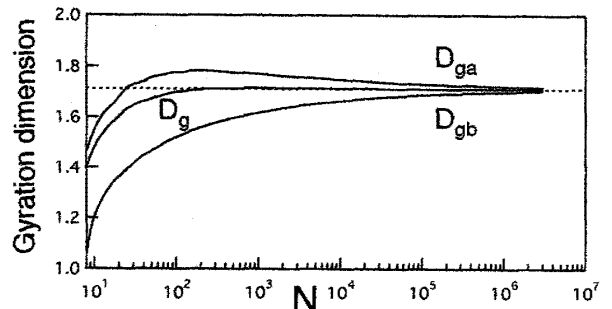


図 23. 回転半径のフラクタル次元

この節では、変形ファクター  $\varepsilon$  の漸近特性をクラスター成長の遷移領域と関連づけて議論し、漸近値として  $\varepsilon(\infty)=0.0888$  を得た。

### I-9. DLA のくさびモデルとフラクタル次元

これまでに明らかとなった様々な性質に従って、DLA のくさびモデルを構築しフラクタル次元を導出する [19]。 (1) 成長安定性の議論から、主軸上に成長を主導する樹枝状先端が存在する 2 重安定性構造。 (2) 対称性の議論から、主要枝の間隔が  $2/\sqrt{3}=66.16^\circ$  の対称構造。 (3) 変形ファクターの議論から、クラスター外形が漸近値  $\varepsilon(\infty)=0.0888$  で決まる楕円構造。 (4) DLA のくさび先端の議論から、樹枝状先端が形成するくさび構造。 (5) 成長確率スケーリングの議論から、くさび角が決定するフラクタル次元。図 24 にくさびモデル (symmetric oval model) が描かれている。存在確率が極大近辺の典型的クラスターとして図 8 に示した 2 重安定性成長を参考に考えられたモデルである。2 重安定性成長の樹枝状先端には角度方向のゆらぎが存在することを述べたが、主要枝の間隔  $\varphi$  はゆらぎが平均化されて対称性を反映した  $\varphi=2/\sqrt{3}$  が達成されていると考えている。外形を決めている変形ファクター  $\varepsilon$  は、主軸上に成長する主導的な樹枝状先端が起こす樹枝状・分岐転移現象に依存している。この転移現象によって動径方向にゆらぎを発生させるが、ゆらぎを含めて統計平均された主軸上先端の相対的位置が  $\varepsilon$  を決めている。このように、動径方向のゆらぎが  $\varepsilon$  を決め、角度方向のゆらぎが  $\varphi$  を決めるという方向の独立性から  $\varepsilon$  と  $\varphi$  が独立と考え、それぞれに平均値を用いたモデルである。クラスター成長を主導する主軸上の先端は、先端角  $\phi$  のくさびを形成して、クラスターを取り巻くラプラス場の中に成長して行く。図から先端角  $\phi(\infty)=106.91\pm0.01^\circ$  が計算され、これを (6) 式に代入して、フラクタル次元の漸近値  $D_\phi(\infty)=1.7112\pm0.0001$  が得られる。

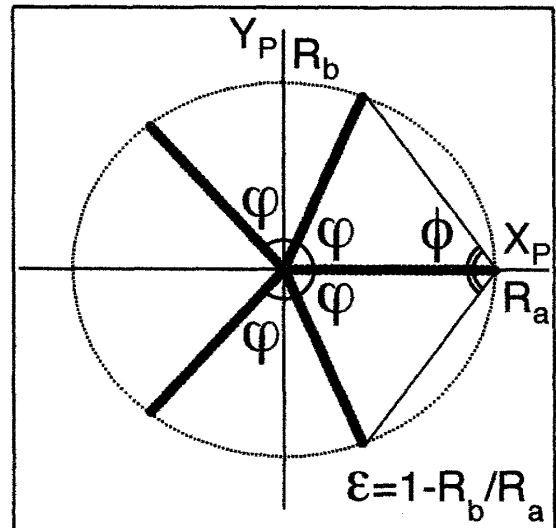


図 24. DLA のくさびモデル

### I-10. くさびモデルの検証

楕円近似を使って考案された DLA のくさびモデルはフラクタル次元 1.7112 の妥当な結果

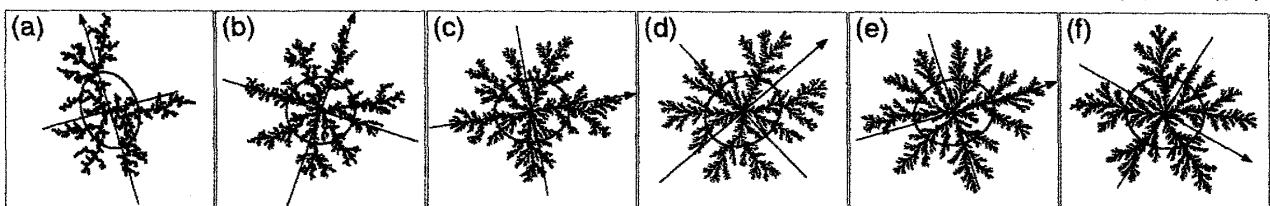


図 25. 2次元 DLA の成長形態と楕円解析 (粒子数 700 個から 40 億個まで)



を与えている。ここでは、DLA の成長過程を楕円近似と比較することにより、成長過程の考察とくさびモデルの検証を行う。図 25 に楕円解析の結果を重ね書きした 40 億粒子 DLA の成長過程を示す。矢印が示す主軸方向は、ゆらぎながら全体として時計方向に回転している。図 (e) に示す主軸方向の先端には分岐現象が発生している。(f) の 40 億粒子 DLA は  $r_{\max}=369232$ 、 $R=207411$  である。右下の樹枝状先端が、クラスター成長を主導する新しい先端として活発に成長しているため、矢印は 5 時方向に向かって回転している。また、この樹枝状先端の成長によって急速に  $R$  が増加するため、図 10 の  $D_g$  は 20 億粒子以上で減少を示している。このクラスターについて  $\varepsilon$  の時間発展を図 18 の破線で示したが、20 億粒子以上で  $\varepsilon$  が増加するのは、樹枝状先端の急速な成長によって  $R_g$  が増加するためである。従って、クラスター成長を主導する樹枝状先端の急速な成長と樹枝状・分岐転移現象によって動径方向のゆらぎ、特に  $R_g$  のゆらぎ、が発生するため、 $\varepsilon$  のゆらぎや  $R$  のゆらぎが形成されている。図 18 の破線がゆらぐのは、このような現象を繰り返しながらクラスターが成長していることを示している。樹枝状先端の急速成長はラプラス場固有の非線形効果によるものであり、更に成長して 40 億粒子以上のクラスターになっても持続され、やがて分岐現象を誘起してゆらぎが継続していくと想像できる。

くさびモデルと 40 億粒子 DLA を図 26 で重ね書きして比較する。図 25 (f) の実際の変形ファクターは  $\varepsilon=0.0614$  であるが、モデルの外形は  $\varepsilon(\infty)=0.0888$  の楕円である。また、右下の樹枝状先端が主軸上にくるように  $62.5^\circ$  反時計方向に回転している。モデルと DLA クラスターは外形、枝構造ともに全体として良く一致している。主軸上の樹枝状先端がクラスターの主導的先端となって右方向に成長している様子がうかがえる。5 本の主要枝の成長方向はモデルと完全には一致していないが、主要枝の間で主導的先端の役割を交換しながら成長してきた結果と理解される。40 億粒子の角度分布を調べ、分布から計算したパワースペクトルが図 27 の黒丸で示してある。モード 5、6 に極大があり、4 から 7 モードの 4 データを使った放物線近似が極大を示すモードは 5.31 となった。この結果は  $\sqrt{3}\pi \sim 5.44$  と誤差内で一致しており、I-6 節で述べた DLA の対称性仮説を巨視的スケールの DLA で検証したことになる。白丸

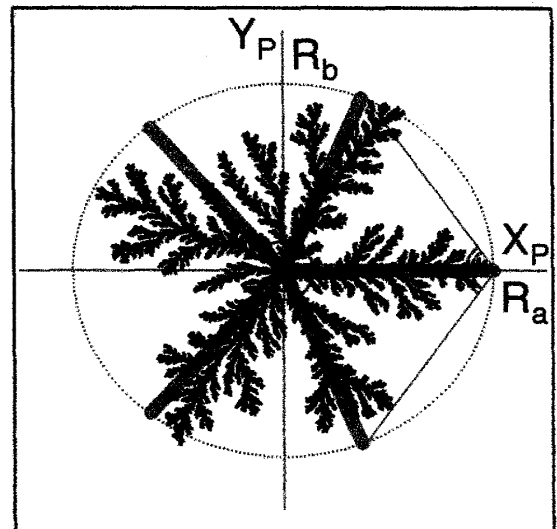


図 26. くさびモデルと 40 億粒子 DLA

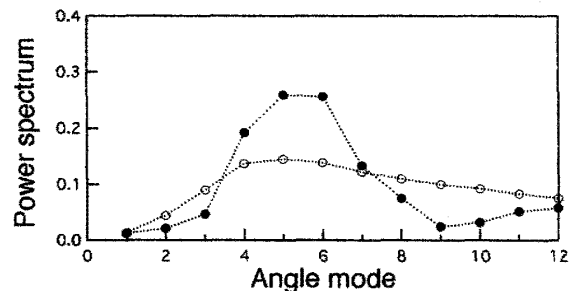


図 27. 40 億 (●) と 2 億 (○) 粒子 DLA の角度分布から求めたパワースペクトル

は2億粒子600個のデータから同様に求めた平均パワースペクトルである。なだらかなピークを示し、4 から 7 モードの放物線近似の極大は 5.10 を与えている。また、2億粒子直前の100万粒子を取り出して求めた平均パワースペクトルは、同様のなだらかなピークを示すが、5.57 モードの極大を与えている。2億粒子でほぼ完成されたモード選択の構造が40億粒子で更に鮮明に現れるのは、巨視的構造のクラスターが完成され、ブラウン粒子の統計的性質を反映した選択構造がより安定になって成長するためと考える [16]。

以上の検証結果をまとめると、楕円外形と対称枝構造で提案されたDLAのくさびモデルは、巨視的 DLA においても平均構造として達成されていることが明らかとなった。また、主導枝の先端分岐現象によって生じる動径方向のゆらぎと、2重安定性構造によって生じる角度方向のゆらぎによって、平均構造のまわりでゆらぎながら成長していることも明らかとなった。無限大 DLA は等方的な円形になるのではないかの推測とともに、無限大 DLA はフラクタルにならないのではないかの疑問があった。くさびモデルの構造が巨視的 DLA で成立していること、巨視的スケールのゆらぎが存在していることから、これらの疑問は解消された。

## I-11. フラクタル次元解析

DLA のフラクタル次元は回転半径を用いた解析方法をはじめとして様々な方法によって解析されている。この節では、異なる方法で解析された2次元 DLA のフラクタル次元について解説し、比較検討を行ってフラクタル次元の性質を明らかにする。

### I-11-a. 回転半径次元

回転半径  $R$  と局所フラクタル次元  $D_g$  については I-5-d 節 (図 10) と I-8 節 (図 23) で考察した。成長次元であるため、成長過程や初期の変形ファクターの変化に大きく影響されていることを述べた。従って、次元解析には初期成長領域を除外し、広いスケール領域のデータを用いる必要がある。これに  $N \sim R^{D_g}$  のべき乗則を想定して指数を求め、回転半径次元  $D_g$  を決定する。2億粒子 DLA 600 個の平均回転半径  $R$  を横軸に図示したのが図 28 (a) である。点線で示す  $4 \times 10^4 \leq N \leq 2 \times 10^8$  の領域の傾きから得た次元は  $D_g = 1.7126 \pm 0.0001$  である。局所次元で見ると、回転半径  $R = 10000$  では  $D_g = 1.7118$ 、 $\varepsilon$  が一定になる漸近領域の  $1.3 \times 10^8 \leq N \leq 2 \times 10^8$  では  $D_g = 1.7119$  のように 1.7112 に近い次元を示している。また、I-8 節の図

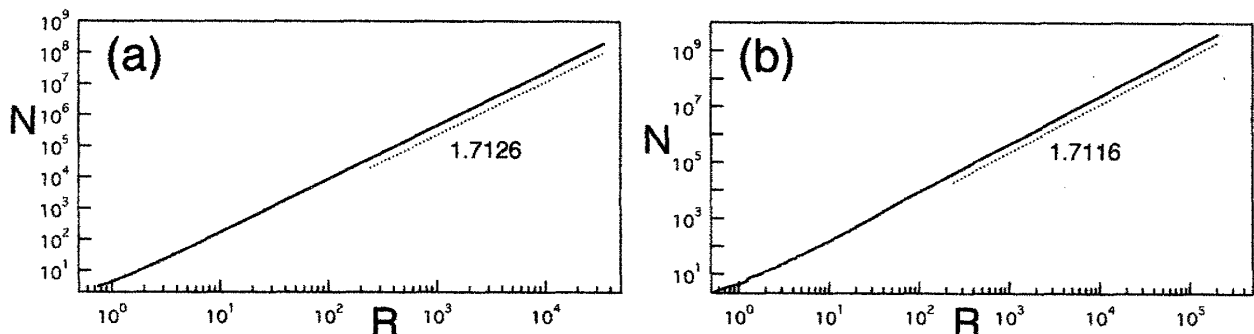


図 28. (a) 2億粒子 DLA と (b) 40億粒子 DLA の回転半径  $R$  対粒子数  $N$

19 と図 23 で用いた 300 万粒子 DLA 74000 個のデータは  $4 \times 10^4 \leq N \leq 3 \times 10^6$  の領域で  $D_G=1.7124$  を示し、局所次元では  $R=100, 1000$  のスケールでそれぞれ  $D_g=1.7160, 1.7134$  と大きな次元を示している。(b) 図はサイズの大きい 40 億粒子 DLA について示したもので、クラスター 1 個の結果で成長過程に依存するゆらぎ (図 10) はあるが、最大回転半径  $R \sim 207400$  の巨視的スケールまでべき乗依存性が成立している。点線領域  $4 \times 10^4 \leq N \leq 4 \times 10^9$  の傾きが示す  $D_G=1.7116 \pm 0.0003$  のフラクタル次元は、くさびモデルの  $D_\phi(\infty)=1.7112 \pm 0.0001$  と誤差内で一致している。ここで、 $D_G$  の誤差は直線近似の下限の変化 ( $10^4 \leq N \leq 10^9$ ) から求めている。回転半径次元は単調減少する振舞を示し、広いスケール領域を取っても長径  $R_a$  の影響によって僅かに大きな数値を与えるが、40 億粒子まで成長すると漸近値に近づくことが解明された。

表 2 には 2 次元 DLA のクラスターを特徴づける回転半径などのスケールが粒子数  $N$  を関数としてまとめている。ただし、40 億粒子以外のデータは複数個の平均値であるため  $R^2 = R_a^2 + R_b^2$  の関係は成立していない。

$N$	DLA 数	$R$	$R_a$	$R_b$	$r_{\max}$
$4 \times 10^9$	1	207411.3	151229.3	141947.7	369231.8
$2 \times 10^8$	600	35484.8	26237.8	23874.9	63223.6
$3 \times 10^6$	$7.4 \times 10^4$	3055.33	2272.54	2040.58	5473.55
$10^6$	$1.4 \times 10^5$	1608.57	1199.69	1070.10	2891.11
$10^5$	$4.6 \times 10^5$	419.282	316.08	275.032	762.904
10000	$1.4 \times 10^6$	109.31	84.046	69.678	203.03
1000	$3.7 \times 10^6$	28.522	22.695	17.153	54.557
100	$3.7 \times 10^6$	7.4194	6.2181	3.9745	14.597
10	$3.7 \times 10^6$	1.8088	1.6161	0.7741	3.562

表 2. 2 次元 DLA を特徴づける長さスケールの統計平均値

### I-11-b. 相関次元

密度相関関数  $C(\mathbf{r})$  は、ベクトル  $\mathbf{r}$  で表されたクラスター密度  $\rho(\mathbf{r})$  を用いて、次式で定義される。

$$C(\mathbf{r}) = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{r}'} \rho(\mathbf{r}' + \mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}') \quad (7)$$

方向性のない DLA ではスカラーの距離  $r = |\mathbf{r}|$  で表した  $C(r)$  が用いられる。 $C(r)$  の測定には、(7) 式に従った直接測定、フーリエ変換と逆フーリエ変換を用いる方法、ランダムサンプリングの方法などが用いられている。測定対象や要求される精度を考えて測定方法を選ぶ必要がある。 $C(r) \sim r^{D_c-d}$  のべき乗依存性から相関次元  $D_c$  が得られる。ここで、 $d$  は空間次元である。ここで、簡便な動径分布関数の方法を紹介する。(7) 式は、 $\mathbf{r}'$  の位置にある粒子の密度  $\rho(\mathbf{r}')=1$  と  $\mathbf{r}'$  の粒子から距離  $\mathbf{r}$  の位置の密度  $\rho(\mathbf{r}'+\mathbf{r})$  との積を表している。 $\mathbf{r}'$  に

関して (7) 式は全ての粒子について平均しているが、これを原点にある種粒子  $\mathbf{r}'=0$ 、 $\rho(\mathbf{r}')=1$  に固定する。するとスカラー距離  $r$  で表した  $C(r)$  は原点から半径  $r$  の円周上の平均密度を表すことになる。これを原点から半径  $r$  まで積分した相関積分は  $\sim r^{D_c}$  のべき乗依存性を示す。これと同等の関数として次に示す累積動径分布関数を定義する。

$$S(r) = \int_0^r 2\pi r'' \bar{\rho}(r'') dr'' \quad (8)$$

ここで、 $\bar{\rho}(r'')$  は半径  $r''$  上の平均密度を表している。 $S(r)$  は半径  $r$  内に存在する粒子の総数であり、最大半径  $r_{\max}$  以上で  $S(\infty)=N$  となりクラスター粒子数と一致する。(7) 式の相関関数に比べれば簡単な解析方法である。フラクタル次元のスケール依存性を詳しく知るため、この解析で得られた局所相関次元を  $D_{c0}(r)$  と書き解説する。図 29 (a) に 300 万粒子 DLA 37000 個から得られた  $D_{c0}(r)$  を示す。半径  $r$  の増加とともに増加し、 $D_{c0}(20)=1.6684$ 、 $D_{c0}(100)=1.6930$ 、 $D_{c0}(1000)=1.7068$  のようにスケールに依存していることがわかる。変形ファクターや非線形効果に関連して述べたように、短いスケール領域で小さいフラクタル次元が観測される点が、回転半径次元と違って自然に思われる。最大半径の平均値が  $r_{\max}=5474$  であるのに対して、相関次元は  $r \sim 1220$  で極大値  $D_{c0}(1220)=1.7080$  を示している。平均粒子密度が最大になるのは外径の約 0.22 倍 ( $\sigma \sim 0.22$ ) のクラスター内部であり、これより大きい半径では平均密度が疎となり次元測定ができないことを表している。ここで、局所次元が極大やカットオフなど特徴的な振舞を示すスケールと  $r_{\max}$  との比を  $\sigma$  と置いて、他の次元解析と比較する指標とする。2 億粒子 DLA 300 個の累積動径分布関数  $S(r)$  を (b) 図に、これから求めた局所次元  $D_{c0}(r)$  を (c) 図に示す。 $S(r)$  の直線性は良いが (b) 図中の短い直線の傾きから

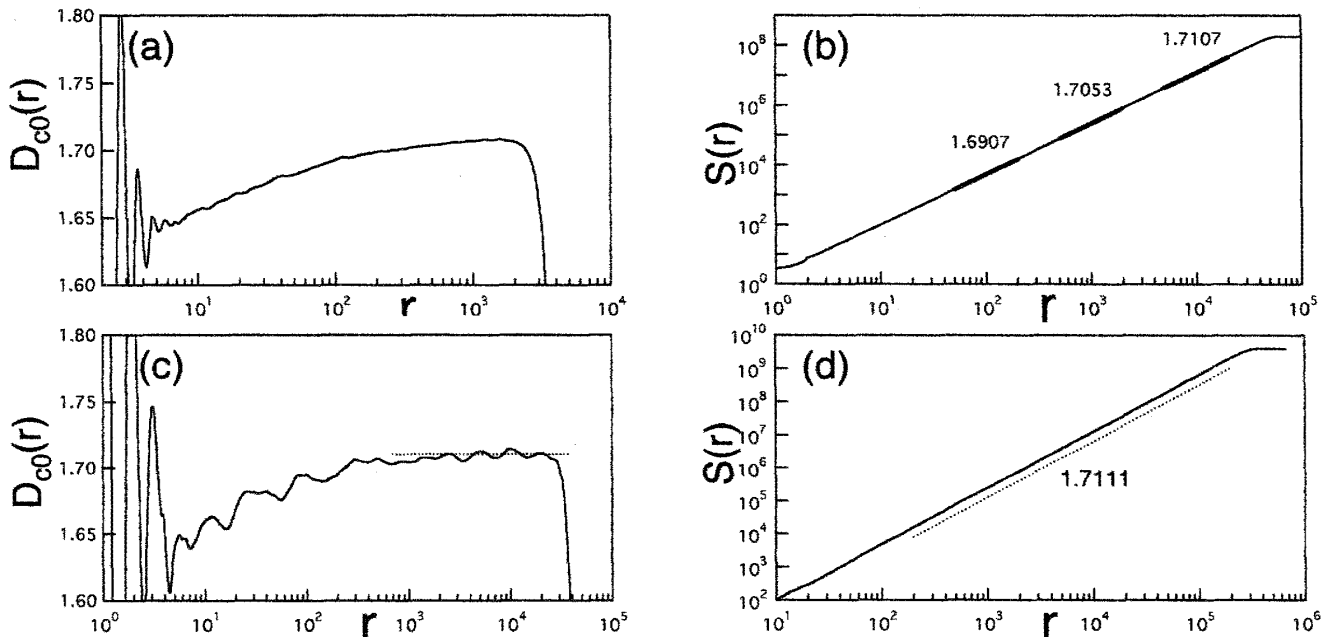


図 29. 相関次元 (a) 300 万粒子 DLA の  $D_{c0}(r)$ 、(b) 2 億粒子 DLA の  $S(r)$   
(c) 2 億粒子 DLA の  $D_{c0}(r)$ 、(d) 40 億粒子 DLA の  $S(r)$

$D_{c0}(100) \sim 1.6907$ 、 $D_{c0}(1000) \sim 1.7053$ 、 $D_{c0}(10000) \sim 1.7107$  と変化し、僅かに次元の増加を示している。 $r \sim 20000$  ( $\sigma \sim 0.32$ ) 以上のスケールで勾配は減少し、約  $r \sim 70000$  以上のスケールで DLA の粒子数と一致する  $S(r) = 2 \times 10^8$  となっている。(c) 図の局所次元で見ると、クラスター数が少ないためノイズが大きい、破線で示したほぼ一定の極大値  $D_{c0} \sim 1.7107$  に増加していく様子が分かる。このように、次元が単調増加するスケール依存性は 300 万粒子 DLA の場合と一致する結果を示しているが、2 億粒子 DLA の  $\sigma$  は大きくなっている。局所次元が極大になる位置は内部構造が完成された領域から未完成領域に移る境界と考えられる。一方、 $r_{\max}$  はクラスターの外径に対応する。楕円形クラスターで考えると、前者は  $R_b$ 、後者は  $R_a$  に相当する。従って、定性的に  $\sigma \sim R_b/R_a = 1 - \varepsilon$  が成り立ち、クラスターが大きくなると  $\varepsilon$  が減少し、 $\sigma$  は増加することになる。(d) 図は 40 億粒子 DLA の  $S(r)$  である。クラスター 1 個では平均作用が弱く、 $S(r)$  が小刻みにうねっているため正確な局所次元は求められない。ほぼ全域を覆う  $200 \leq r \leq 200000$  の範囲で下限と上限を変化させた直線近似の傾きは、誤差が大きい、漸近次元に近い  $D_{c0} = 1.7111 \pm 0.0020$  を与えている。

40 億粒子 DLA をランダムサンプリング法によって解析した相関関数を図 30 に示す。乱数を用いて選ばれた百万粒子について (7) 式に従って全ての組み合わせを計算している。異なった 12 回のサンプリングの結果を平均して  $C(r)$  を求めている。短いスケール領域  $20 \leq r \leq 100$  の直線近似の傾きから得られる相関次元は  $D_c = 1.6881$  の小さい値である。これは累積動径分布関数から求めた 300 万粒子 DLA の  $D_{c0}(20)$ 、 $D_{c0}(100)$  や 2 億粒子 DLA の  $D_{c0}(100)$  に近い値である。ランダムサンプリング法の  $r$  は任意の 2 粒子間の距離であるが、累積動径分布関数の  $r$  は種粒子を中心とした半径を表している。両者の次元が一致することは、大きく成長した DLA でもミクロ構造を見る限り、成長の初期過程で重要であった非線形効果が寄与し、次元が小さいことを示している。一方、長いスケール領域  $100 \leq r \leq 20000$  の直線近似は  $D_c = 1.7112 \pm 0.0012$  を与え、くさびモデルが与えた  $D_\phi(\infty) = 1.7112$  と良く一致している。次元と誤差は直線近似の範囲内で上限と下限を変化させて求めている。なお図 30 を書くにあたって  $C_i = 0.23C_{i-1} + 0.54C_i + 0.23C_{i+1}$  を使って高周波成分を落として平滑化している。直線近似の上限  $\sim 20000$  を  $\sigma$  で表現すると  $\sigma \sim 0.054$  となる。クラスター全体から任意に選んだ 2 粒子間の相関を多数統計平均しているにも拘わらず、動径分布関数の場合より小さい値である。また、直線領域以上の  $30000 \leq r \leq 70000$  では大きな次元  $D_c = 1.7485$  を示している。

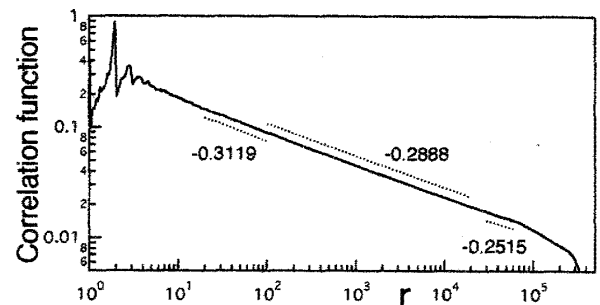


図 30. 40 億粒子 DLA の相関関数  $C(r)$

これらの状況を詳しく調べるため、2 億粒子 DLA 200 個を 20 万粒子のランダムサンプリング法によって解析した相関関数を図 31 に示す。(a) 図の相関関数  $C(r)$  は一見して直線性が

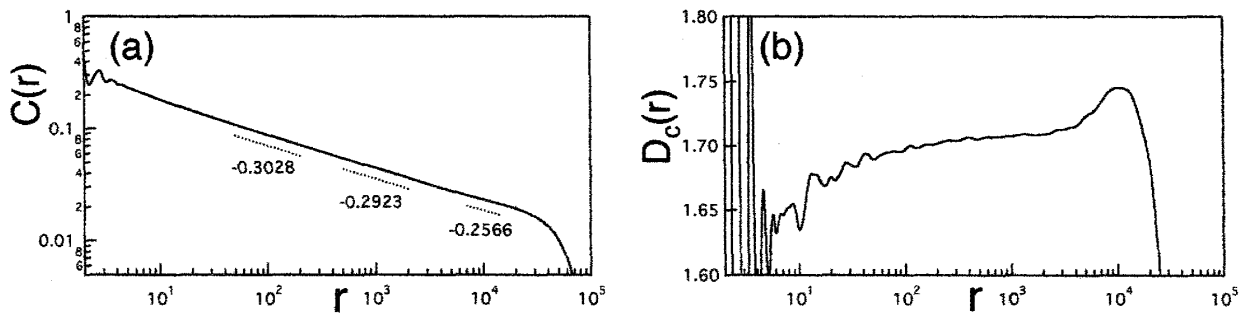


図 31.2 億粒子 DLA の (a) 相関関数  $C(r)$  と (b) 局所相関次元  $D_c(r)$

良いように見える。しかし、このデータを使って求めた (b) 図に示す局所相関次元  $D_c(r)$  には様々な構造が現れている。ここで、局所次元は  $2^{02}$  の幅の直線近似 ( $0.87r < r < 1.15r$ ) から得た値である。局所次元は増加して行き、 $r \sim 1000$  近傍でほぼ一定の  $D_c(1000) \sim 1.7077$  を示している。極値の指標は  $\sigma \sim 0.016$  と非常に小さい値である。その後、 $r \sim 10000$  近傍に  $\sim 1.743$  の異常に大きな値を示すピークが現れる。動径分布関数  $D_{c0}(r)$  には見られなかった異常ピークが、相関関数  $D_c(r)$  になぜ現れるのであろうか。角度方向の相関も含む  $D_c(r)$  には、巨視的構造となった対称性を持った主要枝が角度方向に作る特徴的な長さが現れていると考えられる。通常は、クラスター密度の減少によってスケーリング領域のカットオフが生じるが、DLA の場合は周期性によるカットオフが次元の増加として現れていると理解される。この異常ピークは、40 億 DLA (図 30) の  $r \sim 30000$  の領域が示す高次元に対応することが分かる。このように、2 億 DLA の  $D_c(r)$  には一定領域とピークが分離されて観測できるが、巨視的構造が未完成の 300 万粒子 DLA では両者が重なり判別できないため、局所相関次元が異常に大きな値まで単調に増加しているように観察されている。

相関次元の解析の結果、相関関数に対称性に由来する特徴的な長さが現れること、DLA 解析には累積動径分布関数が有用であることが示された。相関次元は、スケールに依存して増加すること、40 億粒子 DLA においてくさびモデルと一致する  $D_c = 1.7112$  であることが示された。

### I-11-c. ボックス次元

フラクタルパターンの自己相似性は、拡大しても縮小しても相似なパターンが出現することを表している。ボックスカウント法はこの自己相似性の性質を具現化して次元解析する方法である。整数次元の物体をスケール  $\lambda$  の部分に分割して部分の個数  $N(\lambda)$  を調べ、 $N(\lambda)$  の  $\lambda$  依存性から物体の次元を求める相似次元の方法がある。この概念を非整数次元のフラクタルパターンに拡張し、 $N(\lambda) \sim \lambda^{-D_B}$  の関係を使ってボックス次元  $D_B$  を求める方法である。DLA クラスターについてボックスカウント法を用いた詳しい報告があまりない。解析に時間と手間がかかるためと思われる。我々は解析用のキャンバス  $B(i, j)$  を計算機内に用意し、効率よく測定する工夫を行った。キャンバスには 8 ビットのキャラクター配列を用い、サイズは 1 辺が

$2^{13}$  すなわち  $8192 \times 8192$  の正方格子である。 $B(i,j)=0$  の初期化の後、パターンがキャンバスに収まるよう適当な縮尺率  $A$  を選んで、パターンをキャンバスに焼付ける。このとき、8ビットキャラクターの下位 4 ビットを  $2 \times 2$  の格子と見なし、解像度  $\lambda=1$  の焼き付けには  $2 \times 2$  の位置に応じて 1、2、4、8 を配列に入力する。この際、2 重焼き付けを行わないように検証しながらスケールが  $\lambda=1$  の個数  $N(1)$  を計測する。スケール  $\lambda=2$  の個数  $N(2)$  は  $B(i,j)>0$  の個数を計測すればよい。同時に次の計測を考えて、 $B(i,j)>0$  の場合は整数演算で  $2(i/2)$ 、 $2(j/2)$  の配列に 1 を入力する。次の  $N(4)$  は  $B(2i,2j)=1$  の個数を計測し、同様に  $4(i/4)$ 、 $4(j/4)$  の配列を 1 にする。このようにして、 $\lambda=1,2,4,\dots,16384$  の 14 点の  $N(\lambda)$  が計測される。この結果を実際のスケール  $\lambda/A$  に戻して記録しておく。以下の解析は、 $A$  から  $A/2$  の間の異なる 32 種類の縮尺率を使って計測を行った結果である。焼き付けの際に縮尺率を選べるだけでなく、並進や回転操作も自由に選べる点がこの方法の利点である。ボックス次元のスケール依存性を詳しく知るため局所ボックス次元を  $D_b(\lambda)$  と書く。DLA 図形を粒子の中心点、吸着 2 粒子を結ぶ線、円形の面で表したときの次元変化を、300 万粒子 270 個のクラスターで試したのが図 32 である。粒子の扱い方に応じて、 $\lambda < 1$  のスケールでは点の 0 次元、線の 1 次元、面の 2 次元に近づいて行くことがわかる。 $\lambda \sim 50$  以上では全てのボックス次元が一致している。クラスター半径  $r_{\max} \sim 5700$  に対して  $\lambda \sim 400$  に  $D_b$  の極大が見られるがノイズの多い結果となっている。これ以降は全て粒子の中心点を使って解析している。

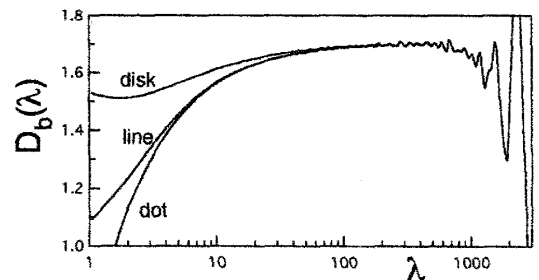


図 32. DLA 粒子を点、線、面で表現したときの局所ボックス次元  $D_b(\lambda)$

300 万粒子 DLA 11000 個と 2 億粒子 DLA 600 個について解析した結果を図 33 に示す。キャンバスに焼付けるときの回転角を (a) 図の 300 万 DLA では  $0, 15, 30, 45^\circ$  の 4 種類、(b) 図の 2 億 DLA では  $0, 45^\circ$  の 2 種類使ってボックス数を計測し、これらを平均して求めた  $N(\lambda)$  から  $D_b(\lambda)$  を求めている。局所ボックス次元は小さいスケールで両解析とも誤差内で一致し、 $D_b(20)=1.6279$ 、 $D_b(50)=1.6705$ 、 $D_b(100)=1.6865$  である。300 万 DLA は  $\lambda=400$  で極大  $D_b(400)=1.7015$  を経て、それ以上では減少して行く。また、2 億 DLA は  $D_b(1000)=1.7058$ 、極

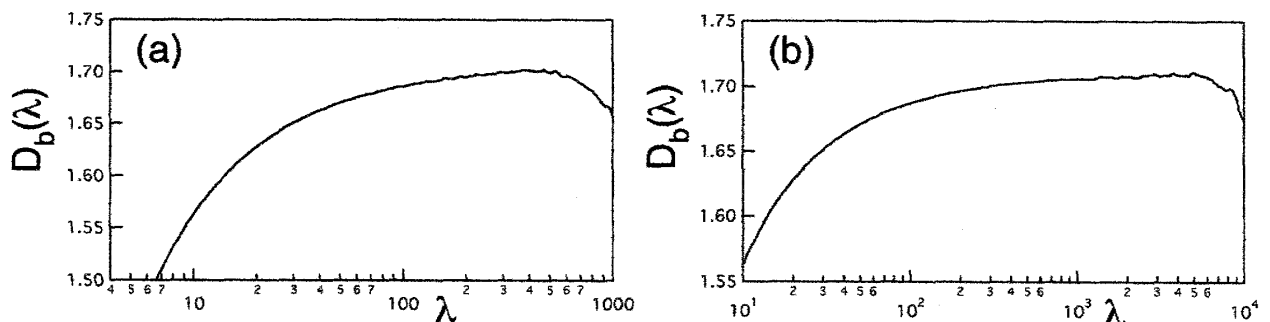


図 33. (a) 300 万粒子 DLA と (b) 2 億粒子 DLA の局所ボックス次元  $D_b(\lambda)$

大  $D_b(5400)=1.7107$  の後減少している。得られたボックス次元の特長を述べると、 $\lambda$  の増加とともに単調増加するスケール依存性を示すことである。ただし、局所相関次元  $D_{co}(r)$  と比較すると僅かに小さい値を示している。第2点は、極大を示す  $\lambda$  が300万DLAは  $\sigma \sim 0.073$ 、2億DLAでは  $\sigma \sim 0.085$  と動径分布関数による相関次元の場合と比較して小さいことである。また、図32と図33(a)の300万DLAと比較すると精度の良い局所ボックス次元を得るには相当数のクラスター平均が必要であることがわかる。

40億粒子DLAについてもボックス次元解析を行った。大きな1個のクラスターであるため、縮尺率  $A$  を小さくとり、並進と回転操作を変化させてキャンバスに焼付けた。総数130回の異なる焼付けを行って求めた  $N(\lambda)$  の平均値を図34に示す。200  $\leq \lambda \leq 20000$  の直線近似の傾きからボックス次元  $D_b=1.7111 \pm 0.0011$  が得られた。近似領域の上限と下限を変化させて2乗平均誤差を計算している。短いスケール領域  $\lambda \sim 100$  ( $50 \leq \lambda \leq 200$ ) では  $D_b=1.6818$  となり、前に示した局所次元  $D_b(100)$  とほぼ一致している。また、長いスケール領域の  $20000 \leq \lambda \leq 100000$  では小さなうねりが現れ、図に示すように  $D_b=1.6851$  となっている。これ以上のスケールでは、図でもわかるように波打つ構造が次第に強くなり、ボックス次元が定義できなくなる。この領域は相関関数で特徴的長さが現れた  $r \sim 30000$  ( $\sigma \sim 0.081$ ) と一致している。相関関数が特徴的長さを敏感に感知する解析であるのに対して、角度方向に周期性のあるDLAとは異なる周期性の正方格子ボックスによる解析が、影響を鈍感にしていると考えられる。しかしながら、図33の局所ボックス次元  $D_b(\lambda)$  には特徴的長さの影響が極値を取る振舞として明瞭に現れている。

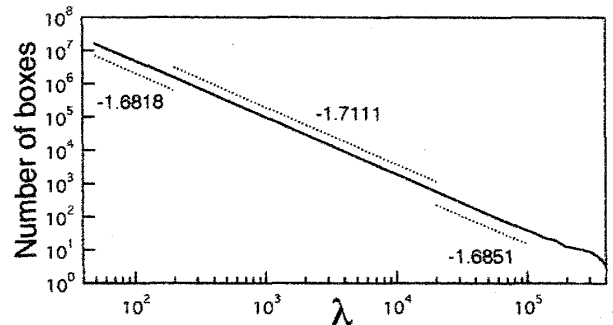


図34. 40億粒子DLAのボックス次元解析

ボックス次元解析から、フラクタル次元にスケール依存性が存在すること、特徴的長さの影響が生じること、40億粒子DLAではくさびモデルと一致する  $D_b=1.7111$  の次元になる結果が得られた。

#### I-11-d. 先端次元とくさび次元

先端次元解析法は図16で見たように、対称性を考慮した作図でDLAクラスターから直接くさび角を測定する方法である。多数の測定を行って、統計平均としてくさび角  $\phi_{ip}$  が求められる。これを(6)式に代入して得られるのが先端次元  $D_{ip}$  である。一方、くさび次元解析法はくさび角  $\phi$  を図24に示したように変形ファクター  $\varepsilon$  の楕円を使って求めている。(6)式に代入してくさび次元  $D_\phi$  が計算されるが、 $\varepsilon$  は多数の楕円解析の結果から得られた統計平均値である。このように、両次元は変数が異なるが統計平均を必要とする次元解析法である。



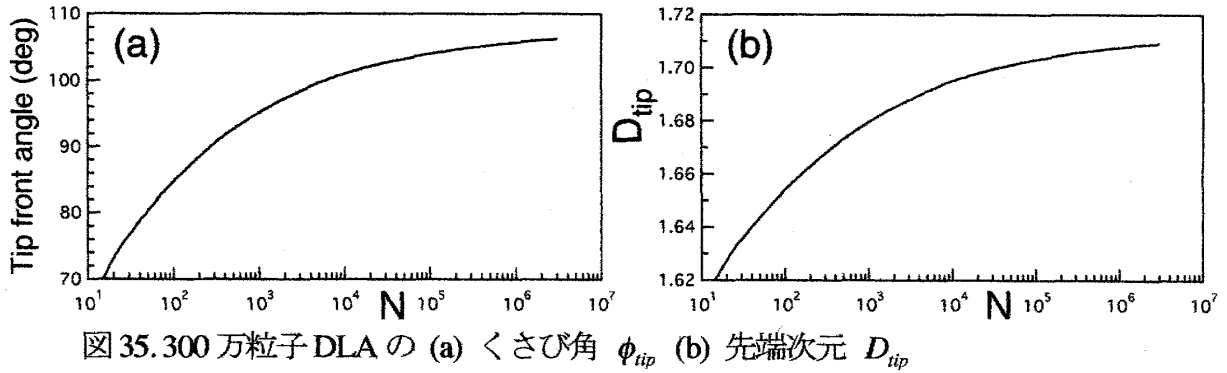


図 35. 300 万粒子 DLA の (a) くさび角  $\phi_{tip}$  (b) 先端次元  $D_{tip}$

300 万粒子 DLA 10 万個の統計平均から得られた平均くさび角  $\phi_{tip}$  と (6) 式から求めた先端次元  $D_{tip}$  を粒子数  $N$  の関数として図 35 に示す。鋭角で尖っていた先端がクラスター成長とともに  $90^\circ$  を超えて一定値に漸近していることがわかる。(6) 式に  $90^\circ$  を代入すると良く知られた平均場理論の次元  $5/3$  が得られる [2]。漸近成長への遷移領域が  $\lambda_c \sim 100$ 、 $N_c \sim 1000$ 、 $\varepsilon_c \sim 0.24$  で特徴づけられることを I-8 節で述べた。この  $\varepsilon_c$  を使って図 24 のくさびモデルから計算すると  $90^\circ$  に近い  $\phi_c \sim 93.172^\circ$  が得られる。実測値の図 35 (a) では、 $N=1000$  が  $\phi_{tip}=95.110^\circ$  と  $90^\circ$  に近い値を示し、(b) 図では先端次元が  $5/3$  近傍の  $D_{tip}=1.6795$  を示している。理論的背景がある訳ではないが、遷移領域を特徴づけるくさび角が幾何学的に特殊な角度の  $90^\circ$  と関連しているように思える。実測した (a) 図の  $\phi_{tip}$  は広く分布した角度の平均値である。ガウス分布することが既に図 17 に示されている。これは図 35 (a) の最大粒子数  $N=3 \times 10^6$  の例であり、角度  $\phi_{tip}=106.193 \pm 13.1^\circ$  から先端次元  $D_{tip}=1.7092$  が得られている。クラスター先端が樹枝状形態から分岐形態に転移する巨視的なゆらぎによって、 $\phi_{tip}$  の分布に  $13.1^\circ$  の大きな幅が現れていると考えられる。角度分布が通常の測定誤差と同じ正規分布を示すことは興味深い。平均角度を中心にして、くさび角に現れる変位が等確率現象によって表現できることを意味しているからである。

DLA の楕円解析とくさびモデルから獲得されたフラクタル次元  $D_\phi$  の結果が図 36 である。600 個の 2 億粒子 DLA をはじめとして、4 千万 DLA など様々なサイズのクラスターについて  $r_{max}$  をパラメータとした統計平均を行い集約した結果である。実線が  $D_\phi$  を示し、図 18 に示した変形ファクター  $\varepsilon$  の値からくさび角  $\phi$  を計算し、これを (6) 式に代入して求めている。

くさび角が  $90^\circ$  となるのはスケール  $r_{max} \sim 36.2$  の位置である。その後、 $r_{max}$  の増加に対して  $D_\phi(100)=1.6841$ 、 $D_\phi(1000)=1.7034$ 、 $D_\phi(10000)=1.7094$  のように単調増加している。べき乗依存性の指数から求めた相関次元やボックス次元と同様の振舞を示している。漸近領域  $r_{max} \geq 50000$  の平

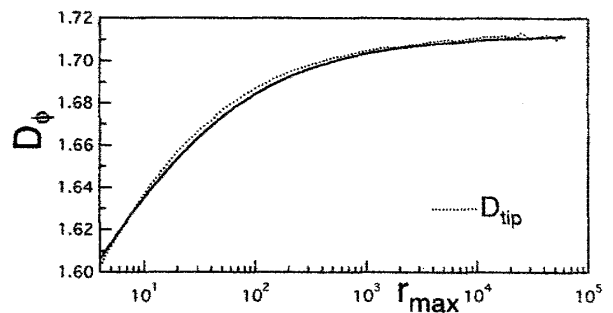


図 36. 2 億粒子 DLA のくさび次元  $D_\phi$

均値  $\varepsilon(\infty)=0.08880$  が示すくさび角  $\phi(\infty)=106.91\pm 0.01^\circ$  から得た漸近次元が 1-9 節で述べた  $D_\phi(\infty)=1.7112$  である。変形ファクターの測定と同時に、同じクラスターの先端角  $\phi_{tip}$  を測定している。この結果から得た先端次元  $D_{tip}$  が破線で描かれている。異なる変数の統計平均であるが  $D_\phi$  の結果と良く一致し、単調増加する次元が得られている。漸近領域  $r_{\max} \geq 50000$  での平均くさび角は  $\phi_{tip}(\infty)=106.93 \pm 0.26^\circ$  となり、これから計算される先端次元は  $D_{tip}(\infty)=1.7113 \pm 0.0008$  となる。600 個の少ない測定数のため、図の破線が示すように個々の  $D_{tip}$  にはノイズが見られるが、領域内での平均値はくさび次元と良く一致する漸近次元である。

次元が極大を示す指標  $\sigma$  はくさび次元や先端次元では大きな値の  $\sigma \sim 0.79$  である。これは、次元が  $r_{\max} \sim 50000$  以上で漸近値に到達することと同時に、クラスター外形がラプラス場を介してクラスター成長を支配するというくさびモデルの考え方に従っているためである。相関次元やボックス次元など内部構造を実際に測定する次元解析とはこの点で本質的に異なっている。内部構造を測定する解析では、漸近次元の構造が内部まで完成された 40 億粒子 DLA によってのみ  $\sim 1.7112$  が獲得されている。これらの状況をまとめたのが表 3 である。一方、くさびモデルは安定した外形が形成される  $r_{\max} \sim 50000$  以上で  $\sim 1.7112$  の一定の次元になっている。これ以上に成長した 40 億粒子 DLA でくさびモデルや先端次元が成立しているのは確かであるが、1 個の DLA で確認するのは困難である。図 18 の破線が示すように、 $\varepsilon$  には先端分岐現象に基づくゆっくりと変動する大きなゆらぎが存在するためである。仮に  $r_{\max} \geq 50000$  の領域で平均値を求めると、 $\varepsilon$  については  $\sim 0.080$ 、 $\phi_{tip}$  については  $\sim 111^\circ$  が得られ、有効数字 1 桁目は漸近値と一致しているが、2 桁目以降については議論する方法がない。このように、十分多くのクラスターについて統計平均ができる場合に限り、くさび次元と先端次元を解析できることがわかる。ここで、粒子直径を  $0.1 \mu\text{m}$  と仮定して見よう。40 億粒子 DLA の半径は約  $r_{\max} \sim 37 \text{ mm}$  となり、バクテリアコロニーの実験 [6] と十分比較できる巨視的サイズになっている。これを測定して得られた相関次元、ボックス次元はともに 1.7112 を示している。また、2 億粒子 DLA の測定から得た先端次元も誤差内で一致する 1.7113 を与えている。提案したくさびモデルは実測した次元と誤差内で一致する 1.7112 の結果を与えている。

スケール $\lambda$	100	1000	10000	2 億 DLA の極値( $\lambda$ )と $\sigma$	40 億 DLA
相関次元 $D_c$	1.6972	1.7077	—	1.7077(1000), $\sigma \sim 0.016$	$D_c=1.7112$
動径分布次元 $D_{c0}$	1.6907	1.7053	1.7107	1.7107(20000), $\sigma \sim 0.32$	$D_{c0}=1.7111$
ボックス次元 $D_b$	1.6865	1.7058	—	1.7107(5400), $\sigma \sim 0.085$	$D_b=1.7112$
先端次元 $D_{tip}$	1.6869	1.7045	1.7106	1.7113(50000), $\sigma \sim 0.79$	—
くさび次元 $D_\phi$	1.6841	1.7034	1.7094	1.7112(50000), $\sigma \sim 0.79$	—
回転半径次元 $D_g$	1.7160	1.7134	1.7118	1.7119( $R=35485$ )	$D_g=1.7116$

表 3. 2 次元 DLA に関するフラクタル次元解析のまとめ

問題点 (i) 2 次元 DLA のフラクタル次元については詳細な検証の結果、漸近次元が  $D(\infty)=1.7112\pm0.0001$  であることが結論される。また、フラクタル次元はスケールに依存して増加し、漸近次元に近づいて行くことが明らかとなった。

## I-12. 2 次元 DLA の考察

### I-12-a. 先端成長

40 億粒子 DLA の成長過程を観察して、クラスター成長を先導する先端成長の重要性を考察する。対称性を考慮して先端次元を求める解析方法 (I-7. 節、図 16) を使用して得た 40 億 DLA のくさび角  $\phi_{ip}$  を図 37 に示す。 $N_c \sim 1000$  近辺で  $\phi_{ip} \sim 90^\circ$  を示しているのは興味深い、それにも増して漸近値  $\phi_{ip}(\infty)=106.93$  を表す水平線の周りで  $\phi_{ip}$  が激しく変動しているのが特徴的振舞である。比較的穏やかな変化を示す変形ファクター  $\varepsilon$  (I-8. 節、図 18) に比べて、 $\phi_{ip}$  は時間的にも強度的にも激しく変化している。成長方向が異なる主要枝間の激しい先頭争いが想像される。実際、図 25 の DLA の成長過程を観察すると、左右と上、右下の主要枝先端が交互に入れ代わって最大半径  $r_{\max}$  を占有している。近接する主要枝との競争に勝った先端が作る包絡線から、図中の A 点のように大きな角度のくさび角  $\phi_{ip}$  が形成されている。先端成長の概念図 38 のくさび角 A がこの状況を表している。図 37 の中には  $\phi_{ip}$  が小さい値から大きな値へジャンプする様子が度々見られ、これが先頭の入れ代わる現象を表している。このように、樹枝状先端が先頭争いを勝ち抜いて行くことがわかる。図 38 は、図 25 (d) 近辺の DLA 先端の図を用いているが、縮尺率の異なる図の重ね合わせのため、樹枝状と先端分岐の 2 つの先端の位置関係は正確ではない。勢い良く成長する樹枝状先端は  $\phi_{ip}$  を急速に減少させ、破線で示す漸近値  $\phi_{ip}(\infty)$  のくさび角を通り過ぎて尖っていく。先端分岐した先端の包絡線から B 点のように小さい  $\phi_{ip}$  のくさび角が形成される。分岐した先端の成長速度は遅いため、最大半径  $r_{\max}$  の増加も遅くなる。結果として、樹枝状先端を形成して成長する他の主要枝に追い越されることになる。まとめると、クラスターを大きいサイズに成長させるのに最も寄与するのは、主要枝先端の先頭争いであると理解できる。

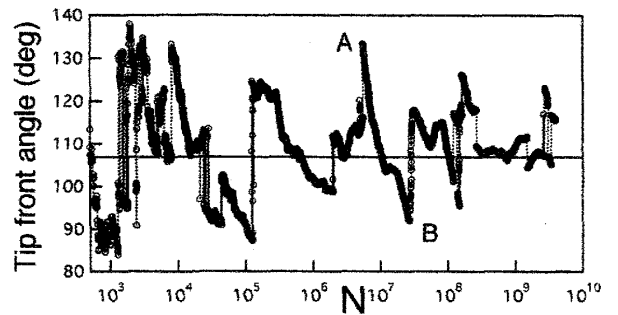


図 37. 40 億粒子 DLA のくさび角  $\phi_{ip}$

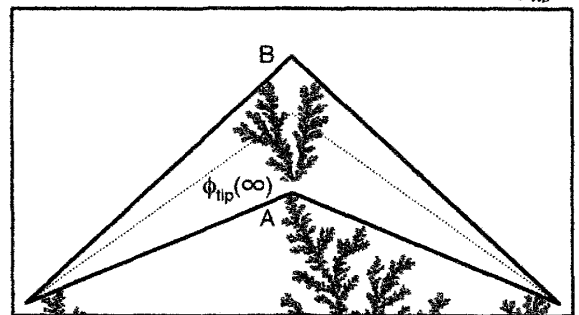


図 38. くさび角  $\phi_{ip}$  の発展概念図

DLA が有する対称性の測定については I-10. 節 (図 27) で述べた。スペクトルのピーク近傍と放物線近似を図 39 に示す。黒丸の DLA 全体に対して、白丸は最後の 100 万粒子のスペクト

ルを表す。全粒子数に比べて100万粒子は無視できるほど小さく、問題点(ii)の界面領域(active zone)の特性と見なせる。破線で示す界面領域の近似放物線は、ピークモード  $M_{act}$  が全体の値  $M_{dla}$  より大きいと同時に頂点の値も大きいことを示している。2億粒子(a)図、40億粒子(b)図の両DLAともに、界面領域で  $\sqrt{3}\pi \sim 5.441$  のモード選択が鮮明になることを示している。主要枝先端の先頭争いの結果として、角度方向に釣り合いの取れた成長構造に発展していくためである。先端が先頭争いに勝ち抜くには、ブラウン粒子を十分に吸着できる配置を確保する必要がある。狭い角度しか確保できない場合は、両側から迫った枝の遮蔽効果によって先端成長が阻害され、そのままの構造で内部に固定化される。一方、広すぎる角度を確保した先端の場合は、両側から飛来する粒子の吸着によって先端分岐現象(図9、図38)が発生して減速し、他の先端に先頭を譲ることになる。激しい先頭争いと勝ち残った先端に働く分岐現象という一種の負帰還作用の結果、釣り合いの取れた角度構造が形成されていると考えられる。柱状節理や樹冠には良く知られたボロノイ多角形の住分け構造が見られる。これらは有限空間を住分ける構造であるが、DLAには動径方向には束縛する境界がなく無限の空間まで広がることが可能である。しかしながら角度方向は閉じられた  $360^\circ$  の有限空間であるため、角度方向に住分け構造が形成されると考えられる。まとめると、DLAの対称性は主要枝間の競合現象が角度方向に形成する住分け構造であると理解される。

生物に見られる住分け構造は、互いが押し合って縄張りを広げようとする作用によって生じている。力学的には境界面を押し合う向きの応力が存在するためである。熱対流の多数のセルが互いに境界面を押し合いながら固化したのが柱状節理である。DLAの場合は主要枝の先端分岐現象が重要な役割を担っている。1本の枝を2本に増やす分岐現象によって角度方向に押し合った枝の密集状態が形成される。図25(e)に示した1億2千万粒子のクラスターはこの状態を表している。成長した図25(f)(図26)の40億粒子DLAは角度間隔  $2/\sqrt{3} \sim 66.16^\circ$  の住分け構造にモード選択されている。先頭競争に勝ち残って先端成長するのに必要十分なブラウン粒子を吸着できるのは、(2)式の吸着分布関数の幅に相当する角度であることを実証している。DLAは動径方向に開かれた枝構造を形成しながら成長する。ボイドにブラウン粒子が侵入し易く、先端分岐を誘起するため枝の密集状態が形成されると考えられる。一方、水平面から鉛直上方に成長するクラスター形成では、ブラウン粒子の侵入強度が弱いため、密集状態や住

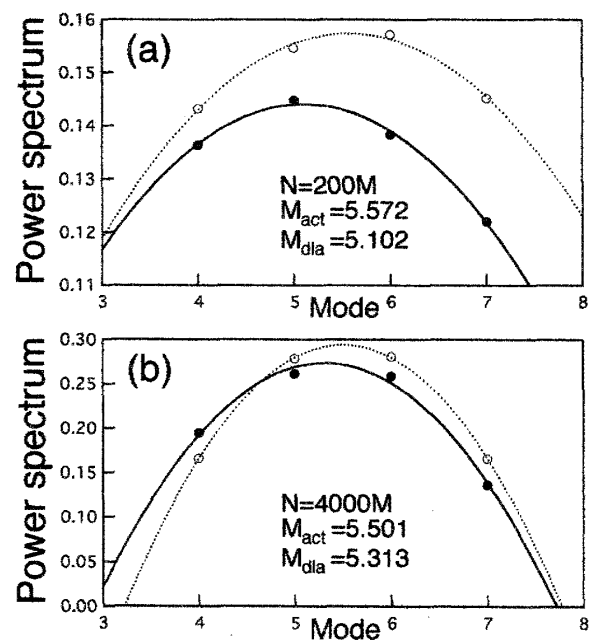


図39. 2億(a)と40億(b)DLAのパワースペクトル(●DLA、○界面領域)

分け構造は形成されない。非線形効果による先端成長によって、十分大きく成長させると必ず 1 本の主要枝に支配された空間パターンが観察される。等方的なパターン形成機構が存在しないため、枝同士が水平方向に押し合う力が働かないことが原因と考えられる。以上のように DLA は、等方性による分岐成長と非線形効果による方向性を持った先端成長がスイッチング的に役割を交換しながら成長するパターン形成である。まとめると、ブラウン運動による分布関数の幅が枝構造を決定しているという、物理的に基本的な立場からの理解が得られた。先端成長が DLA クラスターを大きく成長させるだけではなく、先端の分岐現象には角度方向に疎密の少ない均等な枝分布を形成する機能が備わっている。DLA のフラクタル次元が乱数や実験系に依らず安定しているのは、角度方向の枝分布に住分け機構が作用しているためと解釈できる。先端成長に関する競合過程の考察から、I-6 節に述べた DLA のモード選択仮説の正当性を理解することができた。

次に、先端成長の先頭争いに寄与する非線形効果を考察する。クラスター界面の成長確率は、ラプラス場を解くことによって得られる法線方向のポテンシャル勾配から求めることができる。界面の突出した微少成長が成長確率に及ぼす効果は非線形的に増加する。等ポテンシャル面が突出部の前面で込合い、力線が集中するためである。このような連続体における成長界面の非線形効果に比べて、有限サイズの粒子が吸着成長する DLA の場合は、更に強い非線形効果によって先端が成長する。粒子サイズで界面が一気に突出するためである。先頭争いで先頭に立った先端にとって、この効果は先頭を維持し続けるのに大きな駆動力となる。この結果、サイズの小さい初期段階の DLA クラスターでは、先端成長が持続されて  $\epsilon$  の大きな細長いクラスターが形成される。一方、太さが特徴的長さ  $\lambda_c \sim 100$  以上に成長したマクロ構造の先端 (I-8 節、図 20) では連続体近似が成り立っていると考えられる。ミクロ構造の先端はサイズの小さい場合と同じで、局所的に見ると力線は先端に集中している。力線が多数の微視的先端に集中している場合を考えると、それぞれの先端に集中している力線が束になった力管を想像することができる。マクロ構造では一本の力管が、連続体近似の一本の力線に対応する状態になっていると考えられる。ブラウン粒子の異常侵入サイズが  $\lambda_{Ap} \sim 10$  で示されることを I-8 節で述べたが、これが力管の太さを特徴付けているとすれば、連続体近似が成立するには約 10 本の力管が必要ということになる。厳密に理解するには、マクロ構造が完成されるサイズ  $r_{\max} \sim 5000$ 、ミクロからマクロ構造に遷移するサイズ  $\lambda_c \sim 100$  を定量的に評価しなければならないが、非線形効果と先端分岐現象が関係する難しい問題である。

DLA のミクロな枝分かれ構造に注目すると、粒子のつながりから図 40(a) に示すように 2 種類の粒子に分類される [21]。枝の先端に位置する先端粒子 (○印) は、他の粒子との接点が 1 つだけの粒子である。2 種類目は他粒子との接点が 2 つ以上の幹に相当する粒子 (●印) である。存在確率を前者が  $\rho_{tip}$ 、後者を  $\rho_{trunk}$  とする。先端が成長すれば幹を増やし、幹から枝を出せば先端粒子を増やす構造になっていることが分かる。先端粒子にブラウン粒子が吸着し成

長する先端成長確率を  $p_{tip}$  とおく。また、幹から成長する確率を  $p_{trunk}$  とする。300 万粒子 DLA での先端成長確率の統計平均値は  $p_{tip}=0.785$  であった [21]。これが  $\pi/4$  に近い値なので、40 億粒子 DLA を用いて 15 億粒子まで調べた結果は  $\rho_{tip}=0.21488$ 、 $\rho_{trunk}=0.78512$ 、 $p_{tip}=0.78512$ 、 $p_{trunk}=0.21488$  となった。存在確率と成長確率が正確に先端と幹とで逆の数値になっている。また、(b) 図に示すように  $p_{tip}$  は  $\pi/4 \sim 0.78540$  より僅かに小さい値を与えている。この違いが、I-1 節と I-8 節で述べたシミュレーションのパラメータ  $a=0.005=0.995$  に依存するのかは未解明である。DLA シミュレーションの初期に用いられた約 0.8 の小さいパラメータでは、ブラウン粒子の侵入効果によってミクロな枝分かれ構造に影響が現れることは確かめている。パラメータが 1 に限りなく近い理想的なシミュレーションでは、 $p_{tip}$  が (2) 式の吸

着分布関数の係数  $\pi/4$  と一致するの否か、理論がないので確証はないが、DLA のミクロな先端成長を表す定数とブラウン運動の統計的性質とが関係するように思われる未解決の興味深い課題である。

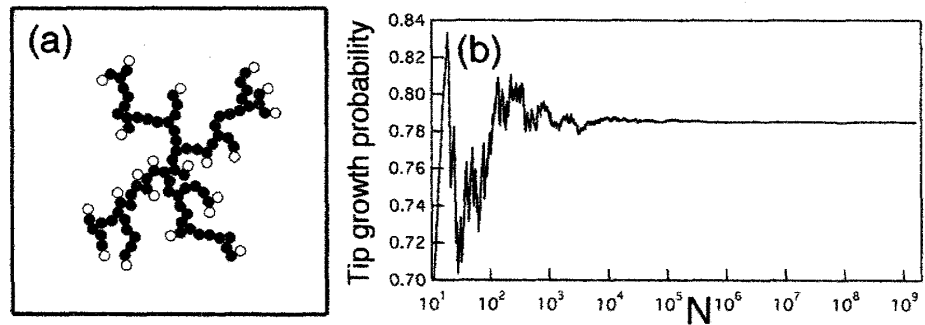


図 40. (a) 先端粒子 (○) と幹粒子 (●) (b) 先端成長確率

先端成長に注目して考察した。多数の枝の中から先頭争いによって先端を勝ち取るに必要な角度が DLA の対称性を導くこと、先頭先端がラプラス場に作るくさび角の成長確率分布によってフラクタル次元が決定されることなど、対称性やフラクタル次元解析の結果と矛盾しない定性的な DLA の成長機構が理解された。

#### I-12-b. フラクタル次元

様々な方法を用いてフラクタル次元解析を行い、DLA の対称性や成長機構と関係する次元の性質を明らかにしてきた。その中で、最も一般的手法と考えられている回転半径次元とボックス次元とが、DLA に対して大きく異なる次元を与えることが示された。ここでは、両フラクタル次元の相違について楕円近似の結果を用いて考察する。図 41 の実線は図 33 (b) に示した 2

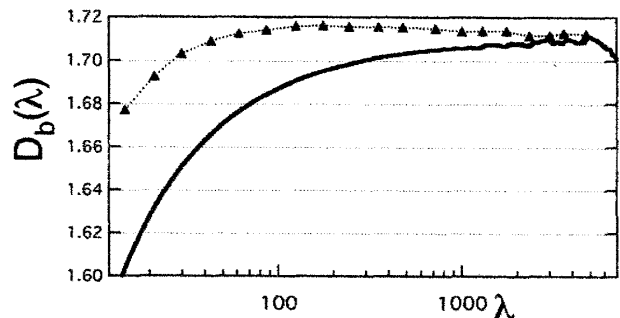


図 41. 局所ボックス次元  $D_b(\lambda)$  の補正

億粒子 DLA の局所ボックス次元  $D_b(\lambda)$  である。スケール  $\lambda$  の増加とともに次元が増加し、 $\sigma \sim 0.085$  となる  $\lambda_m \sim 5400$  で極値  $D_b(\lambda_m) = 1.7107$  となることが表 3. に示されている。サイズ  $r_{\max} \sim 63223$  のボックス次元を測定するのに、 $\lambda_m \sim \sigma r_{\max}$  の小さいスケールのボックス数を測定

する必要があることを示している。このとき、 $\varepsilon(r_{\max})=0.0888$  の楕円形クラスターで測定したボックス数  $N(\lambda_m)$  の平均値は 272.3 個である。もし円形のクラスターを仮定するなら、 $\lambda_m$  のボックス数は  $R_a/R_b$  倍に補正されて、 $N(\lambda_m) \times R_a/R_b \sim 298.8$  個と多くなる。同様にすると、 $\lambda_m$  より短いスケールでは  $\varepsilon$  の大きい楕円のため、 $N(\lambda)$  の補正倍数  $R_a/R_b$  はより大きくなる。要するに、 $\pi R_a R_b$  のクラスター面積を  $\pi R_a^2$  と見なして、長軸  $R_a$  を強調したスケールリング解析を試みた。結果は▲印で示すように、 $\lambda \sim 180$  の極値  $\sim 1.716$  から 1.7120 に減少していく振舞が見られた。これは次元の上限を表す意味をもち、ボックス次元の漸近値が 1.7107 から 1.7120 の間にあることを明らかにしている。またこの結果は、図 23 に示した回転半径次元の振舞と良く一致する特性を示している。回転半径次元の形状変化依存性を明らかにすると同時に、ボックス次元と回転半径次元の関係を鮮明に示す解析である。

### I-12-c. ゆらぎ

樹枝状先端成長と先端分岐現象がクラスターサイズの大きなゆらぎの原因となっていることが、ここまでの議論で理解された。変形ファクターが  $\varepsilon(\infty)=0.0888$  になるまでの DLA について、2 乗平均偏差からゆらぎの振舞を調べた。

$$\delta_R = \sqrt{\langle R^2 \rangle - \langle R \rangle^2} / \langle R \rangle \quad (9)$$

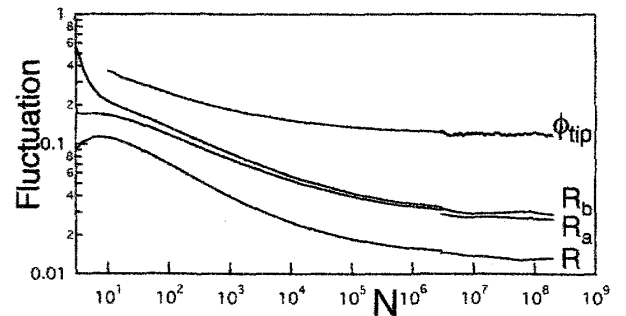


図 42.2 乗平均偏差によるゆらぎの振舞

ここで、 $\langle R \rangle$  と  $\langle R^2 \rangle$  は回転半径の平均値と 2

乗平均値であり、 $\delta_R$  は平均値で規格化している。同様の定義で求めた各種変数のゆらぎが図 42 に示されている。300 万粒子 DLA と 2 億粒子 DLA の結果を重ね書きしている。1 億粒子以上において、回転半径  $R$  には約 13%、長軸  $R_a$ 、短軸  $R_b$  にはそれぞれ 2.7%、2.9%、くさび角  $\phi_{tip}$  には 12% のほぼ一定値の大きなゆらぎが観測されている。無限大においても同様のゆらぎが続くことが予想され、先端分岐現象を繰り返しながら DLA が成長していくと考えられる。初期のクラスター成長については、 $R_b$  のゆらぎが異常に大きな値を示している。クラスターの太さが大きくゆらぎ、回転半径に異常な振舞が現れることを示している。

以上のように、マクロ構造になった約 1 億粒子以上では、クラスターサイズを表す回転半径などが無限大で零に収斂せず、有限の相対ゆらぎをもつことが示された。従って、先端転移現象による DLA の構造ゆらぎは、サイズに比例した大きさを無限大まで継続し続けることが明らかとなった。

### I-13. まとめ

2 次元 DLA のフラクタル次元  $D(\infty)=1.7112 \pm 0.0001$  がクラスター成長の漸近値として得ら

れた。2重安定性成長に基づいたくさびモデル並びに40億粒子DLAの解析結果は、これと良く一致するフラクタル次元を与えている。この結果、クラスター成長を先導する先端がくさび角を形成し、その成長確率分布がDLAのフラクタル性を決定していることが明らかとなった。

界面次元はクラスター成長による変形過程に依存すること、また回転半径次元もクラスター変形に依存することが明らかとなった。変形ファクターが漸近値  $\varepsilon(\infty)=0.0888$  となる約13億粒子以上で、漸近的に両者が一致することが示された。DLA研究に良く用いられている回転半径次元は、クラスター変形を伴うDLAの成長過程では正しい次元を与えないことが明らかになった。

DLAの漸近構造については、粒子性による非線形効果が無視できる  $r_{\max} \sim 50000$  以上のサイズまで成長させる必要があること、主要枝が角度方向に住分けることによって形成される  $\sqrt{3}\pi \sim 5.44$  回の対称性はDLAが成長するほど鮮明になることが、解析と考察により明らかとなった。非線形性と等方性を反映した先端成長と分岐成長が、変形ファクター  $\varepsilon=0.0888$  を中心にしてDLA構造にゆらぎを形成することが、成長安定性の考察から解明された。楕円近似を用いることにより、これはDLA構造に現れる対称モードより低い低周波モードゆらぎであるが、くさびモデルが提案され、次元解析と一致するフラクタル次元が獲得された。

## 第II章 高次元DLAのフラクタル次元

2次元以上の高次元DLAに関するシミュレーションはMeakin [20] によって8次元までなされている。我々は、未解決問題のDLAの全体像を知るため、またシミュレーション方法の確認のため、2次元DLAの研究以前に行った成果について報告する。

### I-2. シミュレーション方法

高次元であることを除いて、基本的に2次元と同じシミュレーション方法が用いられている。ブラウン粒子の放出半径  $r_{\text{Launch}}$  と消滅半径  $r_{\text{Kill}}$  は  $r_{\text{Launch}} = r_{\max} + 3$  と  $r_{\text{Kill}} = 100 r_{\max}$  である。パラメータは2次元と同じ0.995を用い、ブラウン粒子とクラスター粒子との最短距離  $d_{\min}$  を測定して、ブラウン粒子の飛距離を  $d_{\min} - 0.995$  としている。また、ブラウン粒子の位置が  $r > 1.25 r_{\max}$  のときは  $d_{\min}$  測定を行わず、飛距離を  $r - r_{\max} - 0.995$  としている。高速化のための格子は、2次元の場合と違って簡便な直角座標格子を用いた。この格子には最短距離を示した最新のクラスター粒子の粒子番号を記憶しておく。また、クラスター領域に位置する格子には、格子内に存在しているクラスター粒子の番号を記憶させておく。これによって、小さい検索領域内の少ない検索粒子数から最短距離が測定できる。ブラウン粒子の飛距離が最短距離から決められるため、高速のシミュレーションが実行できる。この方法によって、Meakinの手法よりも高次元多粒子の高精度シミュレーションが可能となった。最大粒子数の高次元DLAクラスターを図43に示す。



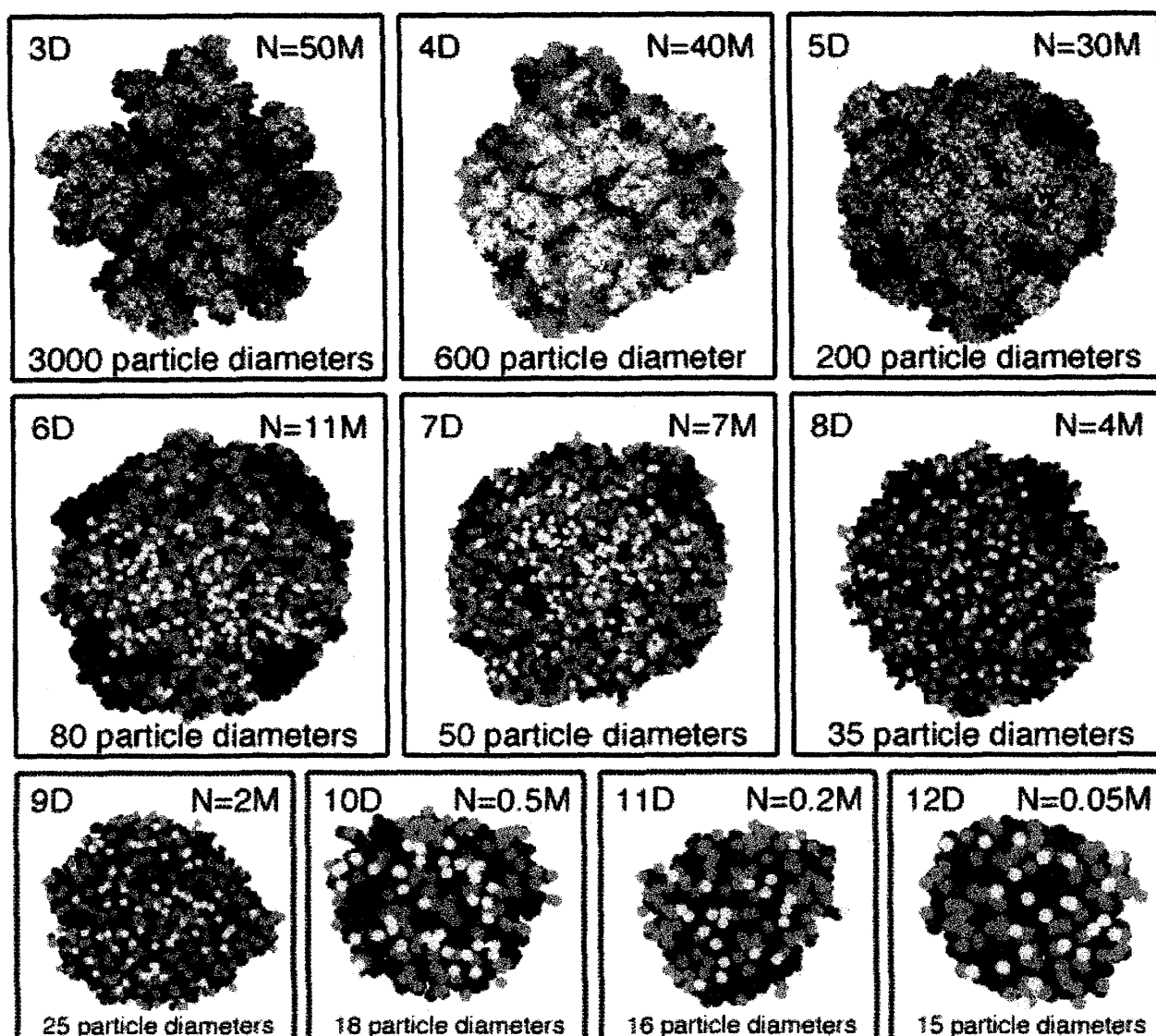


図43. 高次元 DLA クラスタ

図は  $z$  軸正の方向から見たクラスタ表面の  $x-y$  面表示である。観測者と同じ  $x-y$  面上の上下左右の位置に4個の照明があり、表面粒子に当たる照明の数に応じた5段階スケールの明暗で描かれている。照明が当たらない奥の粒子は黒色となり、DLA を立体的に観察することができる。ホームページ (<http://www.esst.kyushu-u.ac.jp/~CDS/topohta.html>、Fractal Pattern の DLA theater) に3次元 DLA の成長過程の動画があるので興味のある方は見てください。院生時代、径の異なる導波管をつなぐのに、径が合うようにスロープをつけたアルミニュームの芯で両方をつなぎ、つなぎ部分に銅メッキした経験がある。電流を流し過ぎたときにできた形が、図の3次元 DLA とそっくりであった印象が残っている。4次元以上のクラスタ図は3次元座標のみを使って描き、4次元以上の座標は無視している。5千万粒子の3次元 DLA には、動径方向にのびる大きな枝構造が観察される。次元の増加とともに太い枝構造は見えなくなり、サイズが  $r_{\max} < 50$  以下になる6次元以上の DLA は、歪んだ球状クラスタのように観察される。

Meakin の7, 8 次元無格子 DLA は  $N \sim 25000$  であるので、更に小さな球状クラスターに見えると想像される。高次元クラスターの表面には、ひげのように飛び出た針状突起を見ることができる。サイズの小さいクラスターで強調される非線形効果によって形成される1次元的成長と考えられる。このように高次元 DLA は、主要な枝構造が形成された  $r_{\max}$  の大きなクラスターを作ることがしだいに困難になることが分かる。

## II-2. フラクタル次元解析

高次元 DLA のフラクタル次元を回転半径次元、ボックス次元、動径分布次元を使って解析する。平均場理論

$$D(d) = (d^2 + 1)/(d + 1) \quad (10)$$

と比較した解析結果をまとめて図 44 に示す。縦軸はフラクタル次元から空間次元  $d$  を引いた  $D-d$  である。平均場理論  $D_{\text{MeanField}}$  は  $d=0$

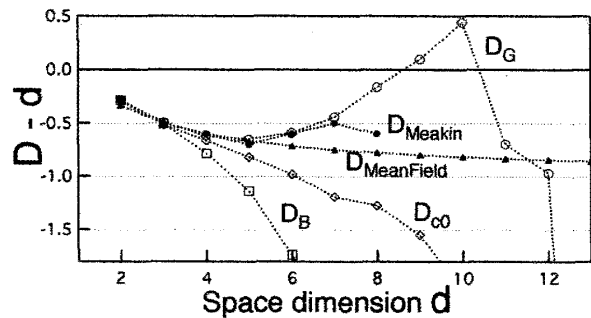


図 44. 高次元 DLA のフラクタル次元

で  $D-d=0$ 、 $d=\infty$  で  $D-d=-1$  となる。 $D_{\text{Meakin}}$  と  $D_G$  は回転半径次元である。ボックス次元は  $D_B$ 、動径分布次元は  $D_{c0}$  で表している。我々の  $D_G$ 、 $D_B$ 、 $D_{c0}$  の結果はこれが最初の報告である。詳しくは以下に解説するが、2 次元と 3 次元の結果はほぼ一致していること、4 次元以上では互いに異なるフラクタル次元を与えること、9 次元と 10 次元の  $D_G$  が空間次元以上となり  $D-d>0$  を示していることがこの図の特徴である。

### II-2-a. 回転半径次元

粒子数 50 万のクラスター平均から求めた回転半径を図 45 (a) に示す。9 次元以上の高次元では粒子数は 50 万以下となっている。平均クラスター数は 2 次元から 13 次元まで、それぞれ 2010、1770、2080、1600、910、317、383、120、42、347、112、246 である。曲線の傾きがサイズの小さい所で増加していく様子が、高次元になるほど鮮明に表されている。これから求めた局所回転半径次元が (b) 図に示されている。傾きの増加が異常であり、9 次元以上では空間次元を超えるフラクタル次元を示している。3~8 次元 DLA の 50 万粒子における回転半径次元は、2.5054、3.3814、4.3514、5.4081、6.5570、7.8371 である。(b) 図内の拡大図が示すように、2 次元 DLA では  $N \sim 1000$  にみかけの異常侵入効果による次元の極大が現れている。同様の振舞が高次元 DLA においても発生し、次元の増加とともに強調されていることが分かる。1 次的な長いクラスターの側面は、空間次元の増加によって次元数が増加し、側面成長による異常侵入の効果が強められるためと理解できる。2 次元 DLA の回転半径次元の場合は、 $\sim 1.715$  の極大値と 1.7112 の漸近値とが比較的近い値であったが、高次元 DLA では全く違う振舞を示してい

る。従って、シミュレーションによって回転半径次元の漸近値を求めるには、非現実的なほど巨大な高次元クラスターが必要と理解される。図44の8次元  $D_{Meakin}$  や11次元以上の  $D_G$  が減少傾向を示すのは、粒子数が少なく異常侵入効果による極大に達していないためである。

3次元DLAの回転半径次元については、50万粒子における2.5054は、Meakinの10万粒子による2.495より大きな値を示している。また、図43に描いた5千万粒子DLAは、図45(c)に示すように2.5271の更に大きな次元を示している。2次元DLAでは、短い主要枝近辺からボイド内部に奥深く侵入したブラウン粒子が、内部を経由して反対側の長い主要枝に吸着することは、枝の遮蔽効果によって完全に不可能である。しかし、3次元以上の空間の粒子には枝方向とは垂直な方向に運動の自由度があるため、内部を経由して反対側に到達することが可能となる。このような効果によって3次元DLAの回転半径次元がしだいに増加していくのかは不明であるが、枝の遮蔽効果が2次元と異なることは明らかである。

回転半径次元については、Meakinの研究よりも高次元多粒子のDLAシミュレーションを行った結果、みかけの異常侵入効果によって初期段階で次元が大きく増加するため、正確な漸近次元を求めることは現時点の粒子数の少ないシミュレーションでは不可能であることが明らかとなった。粒子数最大の3次元DLAの回転半径はべき乗則を満たし、次元  $D_G=2.5271$  が得られた。

## II-2-b. ボックス次元

高次元DLAのボックス次元解析を初めて行った。2次元の方法を多次元に拡張して、可能な限り広いスケールが取れるようにしている。解析したクラスターは、前に述べた複数の50万粒子DLAと図43に示した最大粒子数のDLAである。最大粒子DLAで測定した占有ボックス数対スケールを図46(a)に、勾配解析から得られたボックス次元を図46(b)に示す。ここで、●印が50万粒子DLA、○印が最大粒子DLAを示している。この○印のデータが図44の  $D_B$  である。ボックス数の傾きは空間次元とともに増加するが、11次元以上になると減少している。

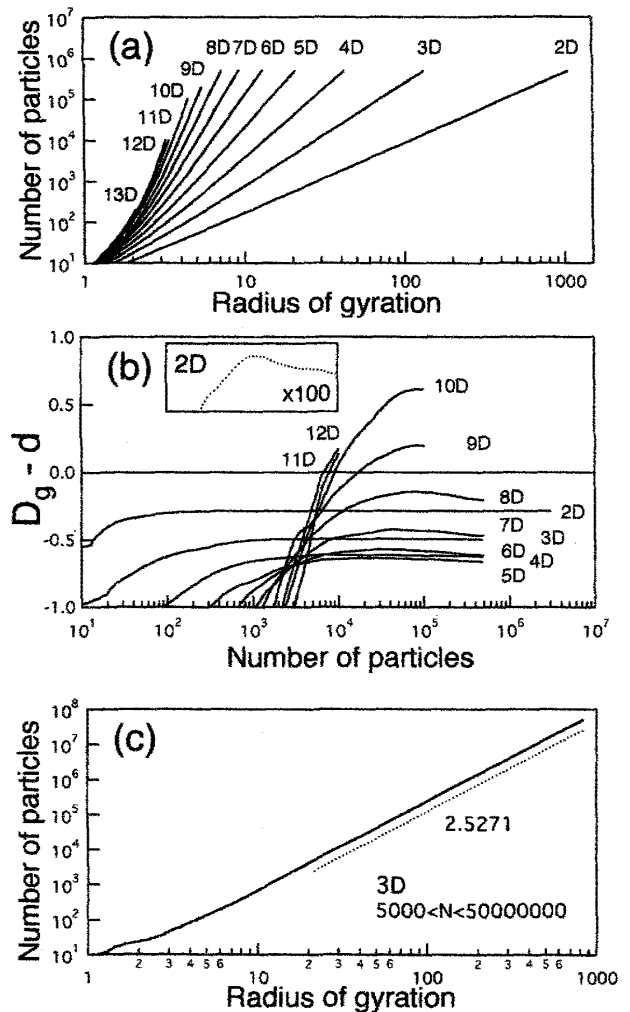


図45. (a) 回転半径 (b) 回転半径次元  
(c) 3次元回転半径次元

クラスター半径  $r_{\max}$  が減少し、非線形効果が強調された初期の1次元的クラスターになっていると考察される。もう1つ、短いスケールでは無視できない効果がある。図34で示したように、粒子を零次元の点として扱うと、スケールの減少に従って次元は零に向かって減少する。このような効果で、(b) 図に示すボックス次元は10次元を極大にしてそれ以上で減少している。この様に小さいスケールでは次元を下げる効果が重なって、2次元あるいは3次元を除く高次元 DLA のボックス次元は全て低い次元を示していると考察される。この結果、図44の中でボックス次元が最も小さい次元を与えている。3次元ボックス次元解析の結果は、50万粒子

DLA の場合はスケール  $20 \leq \lambda \leq 50$  の領域で  $D_B=2.3847$ 、5千万粒子 DLA では  $50 \leq \lambda \leq 250$  の領域で  $D_B=2.4956$  を与えている。4次元解析になると、50万粒子 DLA が  $7 \leq \lambda \leq 15$  で  $D_B=2.9789$ 、4千万粒子 DLA が  $14 \leq \lambda \leq 70$  で  $D_B=3.2157$  を与えている。空間次元の増加で測定スケールが急速に減少し、ボックス次元が激減する様子が鮮明に表されている。

ボックス次元解析においても、漸近次元を得るには十分大きなクラスターを作る必要があることが明らかとなった。3次元 DLA のボックス次元解析を初めて行い、5千万粒子 DLA の次元  $D_B=2.4956$  が得られた。

## II-2-c. 動径分布次元

累積動径分布関数を使って高次元 DLA のフラクタル次元を求めた。2次元 DLA の解析では、DLA のフラクタル次元解析に回転半径次元やボックス次元の方法より適した方法であることが指摘されている。前節と同じ高次元クラスターを使って解析した結果を図47に示す。(a) (b) 図は50万粒子 DLA の平均した結果を8次元まで示している。次元が半径  $r$  に依存して増加していることが分かる。(c) (d) 図に示す3次元5千万粒子、4次元4千万粒子、5次元3千万粒子の最大粒子 DLA の動径分布次元解析については、(d) 図の局所次元が極大を示す近傍の近似直線が(c) 図に示されている。この傾きから求めた次元が図44に◇印で表した  $D_{c0}$  である。3次元で得られた次元  $D_{c0}=2.4838$  は2.5の平均場理論の値に近いが、空間次元の増加とともに理論値より小さくなっていくことが図44から分かる。この次元解析においても、クラスター半径の小さいことが原因して正確な漸近次元が得られないことが分かる。しかしながら図47が示すように、累積動径分布関数には周期構造が現れず、スケールの大きな位置でフラクタル次元を求めることができる。特に高次元では、半径  $r$  の球面の面積が増加するため、

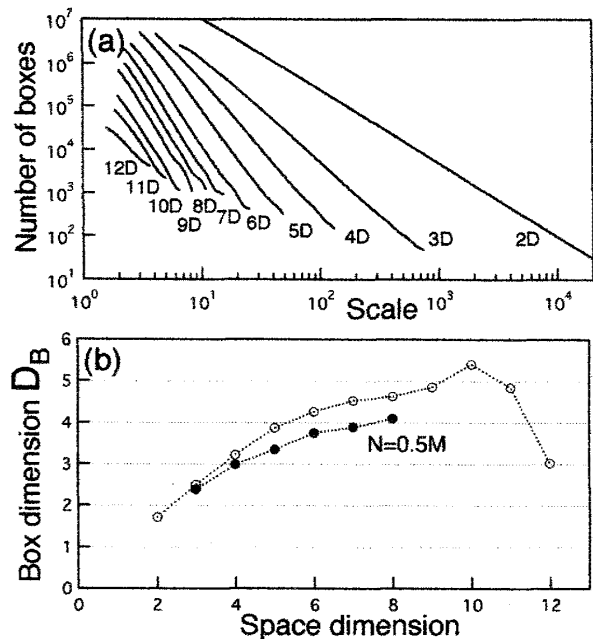


図46. (a) ボックス数 (b) ボックス次元

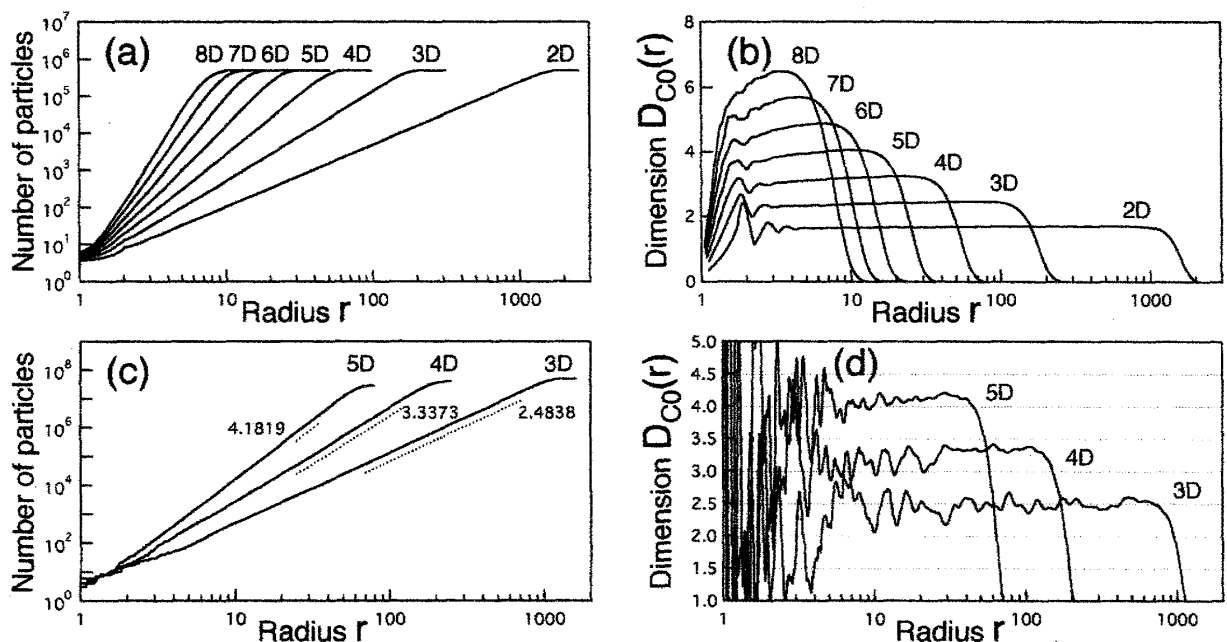


図 47. 累積動径分布関数と次元 (a) (b) 50 万粒子 DLA (c) (d) 最大粒子 DLA

統計平均の効果も増大する。従って、高次元 DLA の正確なフラクタル次元を解明するには、半径の大きなクラスターを作り、動径分布次元を求めるのが最善と考えられる。最大粒子数の 3 次元 DLA については、 $70 \leq r \leq 700$  の解析から動径分布次元  $D_{c0} = 2.4838$  が得られた。

### II-3. 考察

高次元 DLA に関する研究は、以上に述べた次元解析を終えた段階で中断し、当初の目的の DLA の全体像は理解できないままとなっている。マイクロ構造の先端成長確率も調べているが、まとめる段階には至っていない。2 次元 DLA では、2 億粒子や 40 億粒子クラスターがフラクタル構造や成長機構の解明に大きな役割を果たした。現段階では、半径の大きなクラスターを制作して、動径分布次元を測定することが、高次元 DLA のフラクタル次元解明に重要であると考察される。3 次元 DLA の 3 種の次元解析の結果は比較的近い値を示し、平均すると  $2.502 \pm 0.019$  となり、平均場理論が与える 2.5 と誤差内で一致している。一方、その後行った 2 次元 DLA の結果は、第 1 章に示したように平均場理論の 1.6667 とは一致しない漸近次元 1.7112 が得られている。成長安定性、対称性、非線形効果、変形ファクター、成長確率分布など様々な要因が重なり合った結果として、2 次元 DLA のフラクタル次元が決定されることが明らかとなっている。高次元 DLA にも 2 次元と同様にブラウン粒子の異常侵入効果による回転半径次元の異常性や、クラスター成長とともに次元が増加する振舞が観察されている。2 次元 DLA 解明の成果をふまえて、3 次元以降の高次元 DLA を理解する必要があると考えられる。

- [1] T. A. Witten and L. M. Sander; Phys. Rev. Lett. **47**, 1400 (1981).
- [2] T. Vicsek; *Fractal Growth Phenomena* (World Scientific, Singapore, 1992)
- [3] P. Meakin; *Fractals, scaling and growth far from equilibrium* (Cambridge University Press, Cambridge, 1998).
- [4] M. H. Jensen, J. Mathiesen, and I. Procaccia; Phys. Rev. **E 67**, 042402 (2003).
- [5] S. Ohta and M. Inoue; J. Phys. Soc. Jpn. **74**, 951 (2005).
- [6] H. Fujikawa and M. Matsushita; J. Phys. Soc. Jpn. **58**, 3875 (1989).
- [7] O. Praud and H. L. Swinney; Phys. Rev. **E 72**, 011406 (2005).
- [8] M. Plischke and Z. Racz; Phys. Rev. Lett. **53**, 415 (1984).
- [9] P. Ossadnik; Physica **A 195**, 319 (1993).
- [10] P. Meakin; Physica **D 86**, 104 (1995).
- [11] P. Meakin; Phys. Rev. **A 27**, 1495 (1983).
- [12] P. Garik; Phys. Rev. **A 32**, 1275 (1985).
- [13] J. S. Langer; Rev. Mod. Phys. **52**, 1 (1980).
- [14] S. Ohta; J. Phys. Soc. Jpn. **73**, 3495 (2004).
- [15] S. Ohta; J. Phys. Soc. Jpn. **70**, 1971 (2001).
- [16] S. Ohta; J. Phys. Soc. Jpn. **74**, 1096 (2005).
- [17] L. A. Turkevich and H. Scher; Phys. Rev. Lett. **55**, 1026 (1985).
- [18] R. C. Ball, R. M. Brady, G. Rossi, and B. R. Thompson; Phys. Rev. Lett. **55**, 1406 (1985).
- [19] S. Ohta; J. Phys. Soc. Jpn. **78**, 013605 (2009).
- [20] P. Meakin; Phys. Rev. **A 40**, 428 (1989).
- [21] S. Ohta and A. Sakamoto; J. Phys. Soc. Jpn. **71**, 2930 (2002).